Tekniikan matematiikka

RAKENNUS- JA TALOTEKNIIKKA

Huhtahaara, Perälä, Remes, Saalasti

Tiedustelut

Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy
Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta ISBN 978-952-63-3736-4
Tekniikan matematiikka – Rakennus- ja talotekniikka 1. painos, 2017

6 kk:n lisenssi ISBN 978-952-63-3832-3
48 kk:n lisenssi ISBN 978-952-63-3831-6

Toimitus: Niko Haarala
Kansi ja ulkoasu: Anna Mattsson / SuomiDesign
Taitto: Hilkka Hyvärinen / hipateos
Kuvitus: Nea Saastamoinen, Ilpo Haarala (s. 112, 113)

© Valtteri Huhtahaara, Timo Perälä, Satu Remes, Taina Saalasti ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot

Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Esipuhe

Pitelet käsissäsi rakennus- ja talotekniikka-alojen matematiikan oppikirjaa. Kirjassa keskitytään laskuihin, joita työntekijä näillä aloilla tarvitsee. Teos on saatavilla myös digikirjana.

Kirjan suunnittelun ja tekemisen lähtökohtana oli ajatus saada aikaan helppotajuinen matematiikan oppikirja, joka on suunnattu nimenomaan Arkkitehtuuri ja rakentaminen -opintoalalle. Tavoitteena on ollut kirjoittaa mielenkiintoinen ja käytännönläheinen teos, josta saa apuja myös arkisten matemaattisten ongelmien ratkaisuun.

Esimerkiksi rakennusalalla tarvitaan matematiikkaa joka käänteessä – ensin otat mittoja listan pituudesta ja seuraavaksi jo huomaat miettiväsi jiirikulman suuruutta. Muutamassa hetkessä joudut soveltamaan yksikkömuunnoksia ja kulman käsitettä. On siten ensiarvoisen tärkeää miettiä asioita ensin teoriassa ja lopulta soveltaa niitä käytäntöön.

Kirjan tehtävät on jaoteltu vaikeustasoltaan kolmeen eri luokkaan (T1–H2–K3). Luokittelussa käytetään lamppusymbolia 💡. Kirjassa on runsaasti perustason tehtäviä, jotka vahvistavat laskurutiinia. Havainnollistavat esimerkit mahdollistavat myös itseopiskelun. Kirjaan on laadittu myös paljon arviointitehtäviä, sillä oikean suuruusluokan arviointi on elämän kannalta tärkeimpiä matematiikan taitoja.

Kirja sisältää ammatillisen koulutuksen uusimpien tutkinnon perusteiden pakollisten tutkinnon osien lisäksi myös valinnaista materiaalia. Luvut 6 ja 7 tarjoavat kattavan paketin talousmatematiikasta ja tilastoista.

Kiitämme kaikkia, jotka ovat antaneet palautetta ja kehitysehdotuksia kirjaa varten. Toivotamme antoisia hetkiä matematiikan opiskelun parissa.

Joulukuussa 2016

Valtteri Huhtahaara Timo Perälä Satu Remes Taina Saalasti

Sisällys

1. Matematiikan perusteita

Kymmenjärjestelmä 6
Peruslaskutoimitukset 10
Päässälaskutekniikat 19
Pyöristäminen ja vastauksen tarkkuus 23
Murtoluvut 29
Potenssit ja juuret 40

2. Kerrannaisyksiköt

Kilosta milleihin 52
Pikosta teraan 54
Pituus 59
Massa 61
Pinta-alan yksiköt 67
Tilavuuden yksiköt 70
Ajan yksiköt 79

3. Prosentit

Prosentin käsite 86
Prosenttilaskutyypit 91
Promille 104
Prosenttiyksikkö 105

4. Geometria ja mittakaava

Mittakaava 112
Pinta-alat 114
Kolmio 120
Pythagoraan lause 125
Ympyrä 130
Avaruusgeometria 135
Lieriön tilavuus ja pinta-ala 140

5. Yhtälöt

Kaavaan sijoittaminen 166
Tekijämuotoinen yhtälö ja verranto 166
Suoraan ja kääntäen verrannollisuus 172
Muut ensimmäisen asteen yhtälöt 177
Toisen asteen yhtälö 180
Kolmannen asteen yhtälö 183
Funktiot ja kuvaajat 185

6. Talousmatematiikka

Palkkatulojen verotus 192
Arvonlisävero 199
Korot ja lainat 204
Indeksilaskenta 208

7. Tilastot

Mitä tilastot ovat? 214
Kuvaajatyypit 215
Tilastolliset tunnusluvut 223
Frekvenssitaulukot 231
Oman tilastotutkimuksen tekeminen 238

1

Matematiikan perusteita

- Kymmenjärjestelmä
- Peruslaskutoimitukset
- Murtoluvut
- Potenssit ja juuret

Kymmenjärjestelmä

Käytössä on kymmenen eri **numeroa**: 0, 1, 2,..., 8 ja 9. Näitä numeroita yhdistelemällä ja **desimaalipilkun** paikkaa vaihtamalla saadaan esitetyksi mikä tahansa **luku**.

Suomen valtion velka kesällä 2015 oli noin yhdeksänkymmentäseitsemänmiljardia kaksisataamiljoonaa euroa. Osaatko kirjoittaa luvun paperille? Mikä on sinun osuutesi velasta?

9	7	4	8	4	4	8	0	4	1	9	,	1	0	4	7	7
Sadat miljardit	Miljardit (giga)	Sadat miljoonat	Kymmenet miljoonat	Miljoonat (mega)	Sadat tuhannet	Kymmenet tuhannet	Tuhannet (kilo)	Sadat (hehto)	Kymmenet (deka)	Ykköset		Kymmenesosat (desi)	Sadasosat (sentti)	Tuhannesosat (milli)	Kymmenestuhannesosat	Sadastuhannesosat

Esimerkki 1

Miten sanot ääneen seuraavat luvut:

a) 14 500 millimetriä b) 12 000 307 euroa c) 14,94 sekuntia

Ratkaisu:

a) neljätoistatuhatta viisisataa millimetriä

b) kaksitoistamiljoonaa kolmesataaseitsemän euroa

c) neljätoista sekuntia ja yhdeksänkymmentäneljä sekunnin sadasosaa
(tai neljätoista pilkku yhdeksänkymmentäneljä sekuntia)

Esimerkki 2

Kirjoita seuraavat luvut numeroiden avulla:

a) viisisataatuhatta neljäsataa euroa ja viisikymmentäyhdeksän senttiä

b) kolmetoista senttimetriä ja kolmekymmentäviisi senttimetrin sadasosaa

c) neljä sekuntia ja kuusikymmentäkolme sekunnin tuhannesosaa.

Ratkaisu:

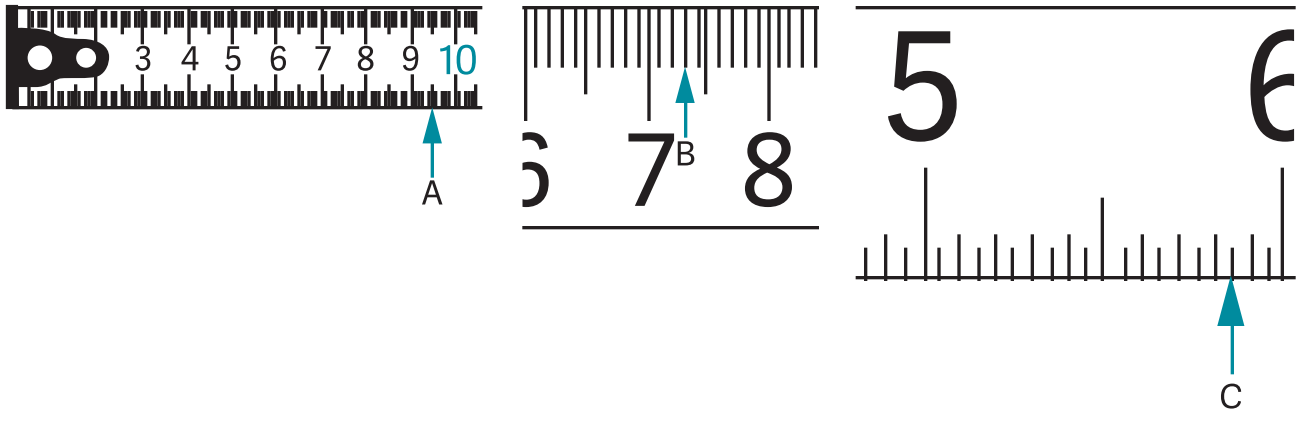
a) 500 400,59 €

b) 13,35 cm

c) 4,063 s

Esimerkki 3

Ohessa on kuvia rullamitasta. Mitä lukua nuolet osoittavat? Anna vastaus desimaaliluku na senttimetreinä. Anna luku niin tarkasti kuin pystyt.



Ratkaisu:

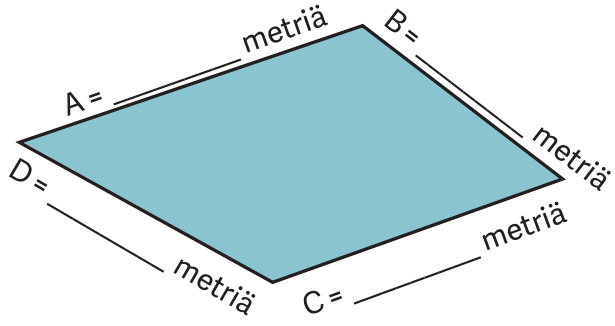
a) Nuoli A osoittaa lukujen 9 ja 10 puoleen väliin. Lukema on siis 9,5 cm.

b) Lukujen 7 ja 8 väli on jaettu kymmeneen yhtä suureen osaan. Yhden osan pituus on siis 0,1, joten nuoli osoittaa arvoa 7,3 cm.

c) Lukujen 5 ja 6 väli on jaettu kymmeneen yhtä suureen osaan, joista jokainen osa on jaettu vielä kahteen osaan. Tosin sanoen väli on jaettu ensin 0,1 cm:n pituisiin väleihin ja sitten 0,05 cm:n pituisiin väleihin. Lukema on siten 5,85.

Tehtäviä

1. Olet työparisi, Inarin, kanssa mittaamassa nelikulmion muotoisen tontin mittoja. Otat ylös niitä lukuja, joita Inari sinulle huutaa. Kirjoita alla olevaan kuvaan tontin sivujen mitat.



”Sivun A pituus on kuusikymmentä kolme pilkku seitsemän metriä.”

”Sivun B pituus on tasan viisitoista metriä pienempi kuin sivun A pituus.”

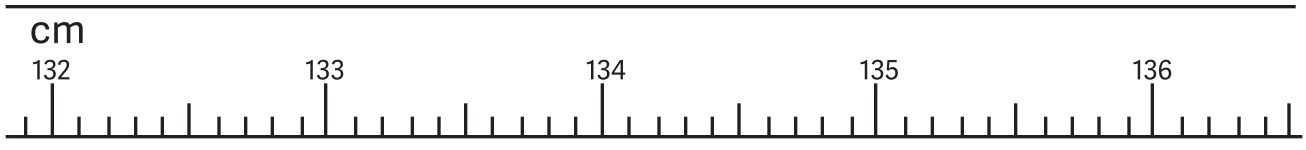
”Sivun C pituus on tasan viisituhatta yhdeksänsataakolmekymmentä senttimetriä.”

”Sivun D pituus on kaksi metriä suurempi kuin sivun C pituus.”

2. Mikä luvun 123 456,789 numeroista edustaa

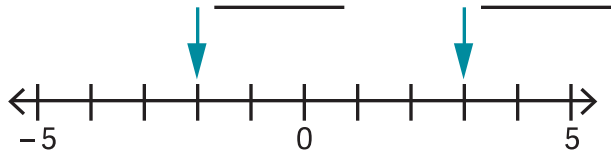
a) satoja _____ b) sadasosia _____ c) kymmeniä tuhansia? _____

3. Tommi mittasi ikkuna-aukon leveyden rullamitalla. Hän ilmoitti leveyden olevan 134,1 cm ± 3 mm. Merkitse alla olevalle lukusuoralle Tommin ilmoittama väli.

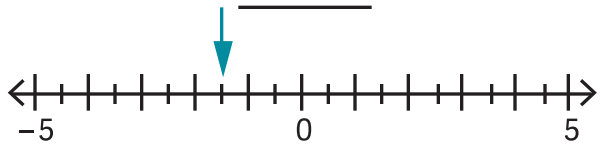


4.

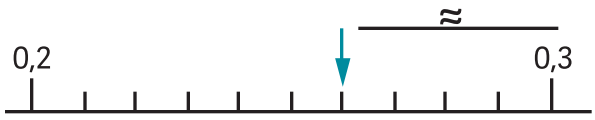
a) Kirjoita nuolen viereen, mitä lukua nuolet osoittavat. Anna vastaukset ykkösten tarkkuudella.



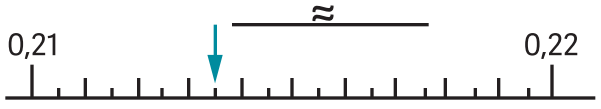
b) Kirjoita nuolen viereen, mitä lukua nuoli osoittaa. Anna vastaus kymmenesosien tarkkuudella.



c) Kirjoita lukusuorien nuolten viereen, mitä lukua nuolet osoittavat. Anna vastaus sadasosien tarkkuudella. Pyöristä tulos lisäksi kymmenesosien tarkkuuteen.



d) Kirjoita nuolen viereen, mitä lukua nuoli osoittaa. Anna vastaus kymmenestuhannesosien tarkkuudella ja pyöristä tulos tuhannesosien tarkkuuteen.



5. Marjatta punnitsi puolillaan olevan sementtisäkin. Vaaka ilmoitti säkin massaksi 8,3 kg. Vaa'assa oli merkintä "± 0,05 kg". (*Vihje: Voit käyttää apunasi alla olevaa lukusuoraa.*)

a) Onko mahdollista, että sementtisäkki painoi 8,285 kg? Perustele vastauksesi.

b) Onko mahdollista, että sementtisäkki painoi 8,365 kg? Perustele vastauksesi.

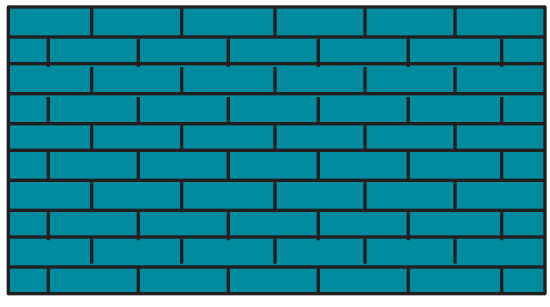
6. Erään yrityksen liikevoitoksi ilmoitettiin uutisissa neljäkymmentämiljoonaa kuusisataatuhatta euroa. Yrityksellä on tuhat työntekijää. Laske ilman laskinta, kuinka monta euroa liikevoitto on yhtä työntekijää kohden.

7. Sijoita seuraavat luvut laatikoihin (*Huom. On mahdollista, ettei luku sovi mihinkään laatikkoon. Osa laatikoista voi jäädä tyhjiksi*):

a) kuusi kokonaista ja seitsemän sadasosaa b) 2 miljardia c) –7,08762 d) 2 533 e) –7,079999 f) –7,1 g) kymmenen kokonaista ja neljä sadasosaa h) 210 miljoonaa i) 0,00009 j) neljätoista sadasosaa.

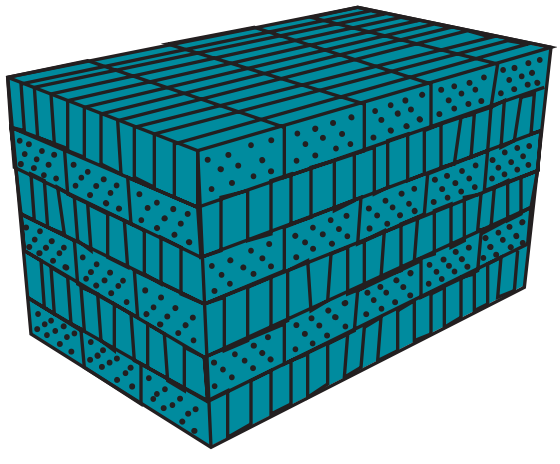
< 800 000	< 0,001	suurempi kuin tuhat	< –7,08	pienempi kuin 8 mutta suurempi kuin 7
= 10 · 1,4	= 100 · 0,607	suurin luku	pienin luku	–8 < luku < 8

8. Yhden tiiliskiven massa on noin 3 kg.



a) Kuinka monta kilogrammaa oheinen tiiliseinänpala vähintään painaa?

b) Kuinka monta kilogrammaa painaa kuvan tiililava? (*Vihje: Joka kerroksessa ei ole yhtä monta tiiltä!*)



c) Erääseen rekka-autoon saa ottaa enintään 40 000 kg painavan kuorman. Kuinka monta oheisen kuvan tiililavallista autoon saa lastata?

9. Laske päässä seuraavat laskutoimitukset:

a) $5 \cdot 10 =$	b) $50 \cdot 10 =$	c) $10 \cdot 0{,}2 =$	d) $1000 \cdot 5{,}5 =$
e) $5 : 10 =$	f) $72{,}5 : 100 =$	g) $2 : 10 =$	h) $10 : 2 =$
i) $0{,}005 : 100 =$	j) $600 : 300 =$	k) $60 : 30 =$	l) $6 : 3 =$
m) $0{,}6 : 0{,}3 =$	n) $0{,}6 : 3 =$	o) $70 : 2 =$	p) $70 : 2 : 10 =$
q) $70 : 20 =$	r) $90 : 20 =$	s) $0{,}3 \cdot 10 =$	t) $3 \cdot 10\,000 =$
u) $8 : 10 =$	v) $700 : 1\,000 =$	w) $6 \cdot 5 \cdot 10 =$	x) $4{,}3 \cdot 2 =$

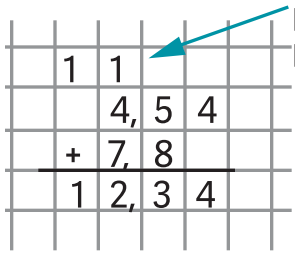
Peruslaskutoimitukset

Tässä kappaleessa kerrataan peruslaskutoimitukset: yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku. Muistellaan aluksi, miten näitä laskutoimituksia tehdään allekkain ja mikä on laskujärjestys.

Yhteen- ja vähennyslaskut
Kun lasketaan yhteen- ja vähennyslaskuja allekkain, on muistettava merkitä vastaavat lukuyksiköt allekkain: ykköset allekkain, kymmenet allekkain jne. Desimaaliluvuilla laskettaessa pilkut tulevat allekkain.

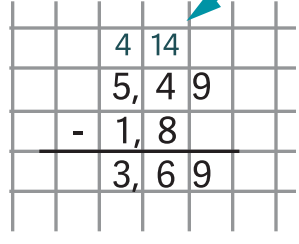
Esimerkki

Laske allekkain 4,54 + 7,8.



Jos allekkain olevien lukujen summa ylittää kymmenen, merkitään kymmenet muistiin.

Laske allekkain 5,49 – 1,8.



Jos lukujen erotus on alle nollan, "lainataan" yksi kymmen viereiseltä luvulta.

Muistathan, että yhteenlaskun tulos on nimeltään **summa**.

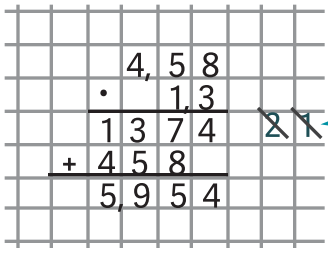
Muistathan, että vähennyslaskun tulos on nimeltään **erotus**.

Kertolasku
Kun lasketaan kertolaskua allekkain, ykkösten, kymmenten jne. ei tarvitse olla allekkain. Kertolaskua laskettaessa ei ole väliä, kummin päin luvut ovat.

Esimerkki

Laske 4,58 · 1,3

Ratkaisu:



Kertolaskun kymmenet merkitään muistiin ja lisätään seuraavaan tuloon.

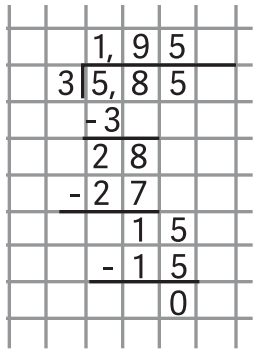
Vastauksen pilkun paikka määräytyy kerrottavista luvuista: lukujen 4,58 ja 1,3 pilkun jälkeen on yhteensä kolme numeroa, joten vastauksessakin on pilkun jälkeen kolme numeroa. Muistathan, että kertolaskun tulos on nimeltään **tulo**.

Jakolasku
Jakolaskua voidaan merkitä kahdella tavalla: jaettava : jakaja tai $\frac{\text{jaettava}}{\text{jakaja}}$

Jakolaskun tulos on nimeltään **osamäärä**!

Esimerkki

Laske 5,85 : 3 jakokulmassa.



1. Jaa.
2. Kerro.
3. Vähennä.
4. Tiputa alas.

Kun kerrotaan toisella luvulla, jätetään yksi ruutu tyhjäksi tai kirjoitetaan sen tilalle nolla.

Laskujärjestys
Laskujärjestys pätee kaikille luvuille: kokonaisluvuille, desimaaliluvuille ja murtoluvuille.
1. sulut, alkaen sisimmistä
2. potenssit ja juuret
3. kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle
4. yhteen- ja vähennyslaskut vasemmalta oikealle

Esimerkki

Laske $\left[3 + (8 - 3)\right] \cdot 5 + 2$

Ratkaisu:

$3 + (8 - 3) \cdot 5 + 2$

$= (3 + 5) \cdot 5 + 2$

$= 8 \cdot 5 + 2$

$= 40 + 2$

$= 42$

Laske $\dfrac{6 + 7 \cdot 2}{2 \cdot 2}$

Ratkaisu: Lauseke voidaan kirjoittaa myös näin: $(6 + 7 \cdot 2) : (2 \cdot 2)$

$= (6 + 14) : 4$

$= 20 : 4$

$= 5$

Tehtäviä

1. Laske allekkain.

a) 149 + 284

b) 45,9 + 28,2

c) 345,89 + 27,1

d) 459 – 328

e) 234 – 76

f) 45,89 – 8,3

2. Laske allekkain.

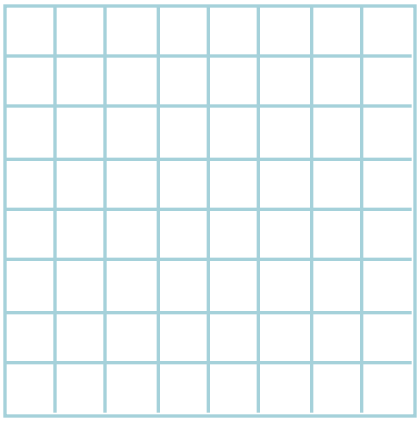
a) 46 · 7

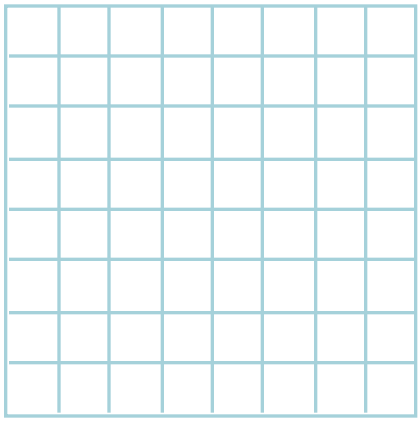
b) 24 · 16

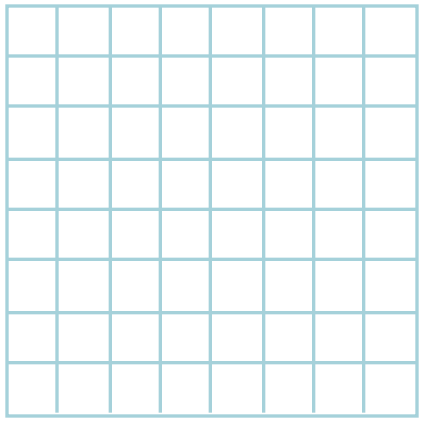
c) 148 · 23

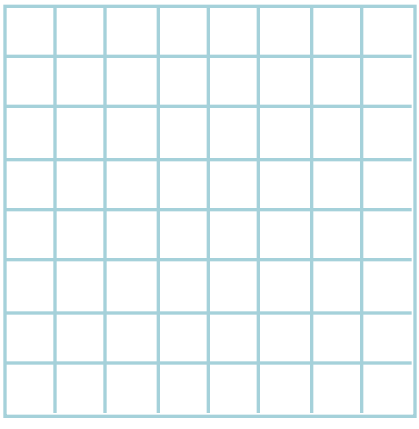
d) 345 · 12,9

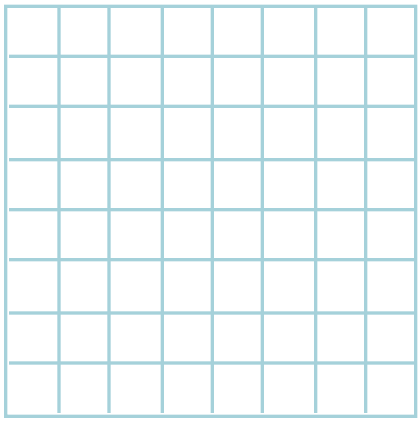
e) 3,08 · 1,3











3. Laske ilman laskinta lukujen

a) 35 ja 18 summa _____

b) 29 ja 17 erotus _____

c) 3 ja 8 tulo _____

d) 24 ja 3 osamäärä. _____

4. Laske ilman laskinta.

a) 3 · (5 – 3) + 4 = _____

b) 3 · 5 – 3 + 4 = _____

c) 3 · 5 – (3 + 4) = _____

5. Laske ilman laskinta.

a) 15 : 3 + 2 = _____

b) 18 : 3 · 2 = _____

c) 5 · (2 + 16 : 2) = _____

6. Laske ilman laskinta.

a) $\frac{2 + 4}{3} =$ _____ b) $\frac{18}{2 \cdot 3} =$ _____ c) $3 \cdot 8 : 2 \cdot =$ _____

7. Laske laskimella.

a) $\frac{15{,}8 + 27{,}4}{3{,}6} =$ _____ b) $3 \cdot (5{,}8 + 12{,}5) =$ _____

c) $4 + \left[5 - (2{,}8 + 1{,}3) \cdot 2\right] =$ _____

8. Laske allekkain.

a) 455 : 5 b) 144 : 3 c) 821 : 3

9. Laske ilman laskinta

a) lukujen 4 ja 14 summan ja luvun 2 tulo _____

b) lukujen 3 ja 5 tulon ja luvun 4 erotus _____

c) lukujen 24 ja 4 osamäärän ja lukujen 3 ja 2 tulon erotus _____

d) lukujen 12 ja 14 summan ja lukujen 2 ja 5 tulon osamäärä. _____

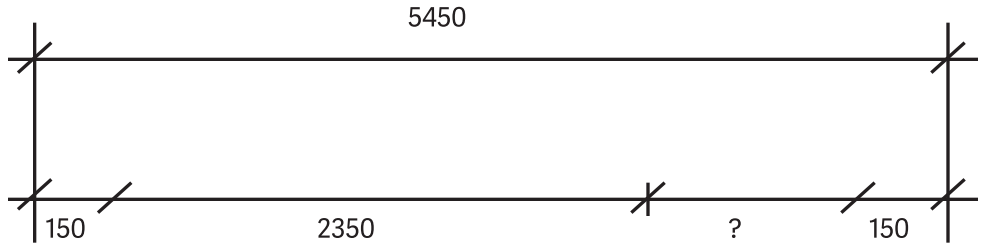
10. Laske ilman laskinta.

a) $3 \cdot (8 : 2) \cdot 2 =$ b) $2 + \left[8 : (2 + 2)\right] =$ c) $3 \cdot 5\left[2 + 4 \cdot (5 - 3)\right] =$

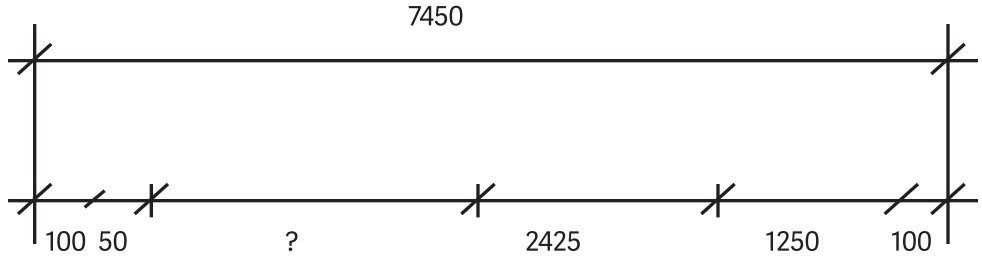
_____ _____ _____

11. Laske puuttuva luku mittalinjoista ilman laskinta.

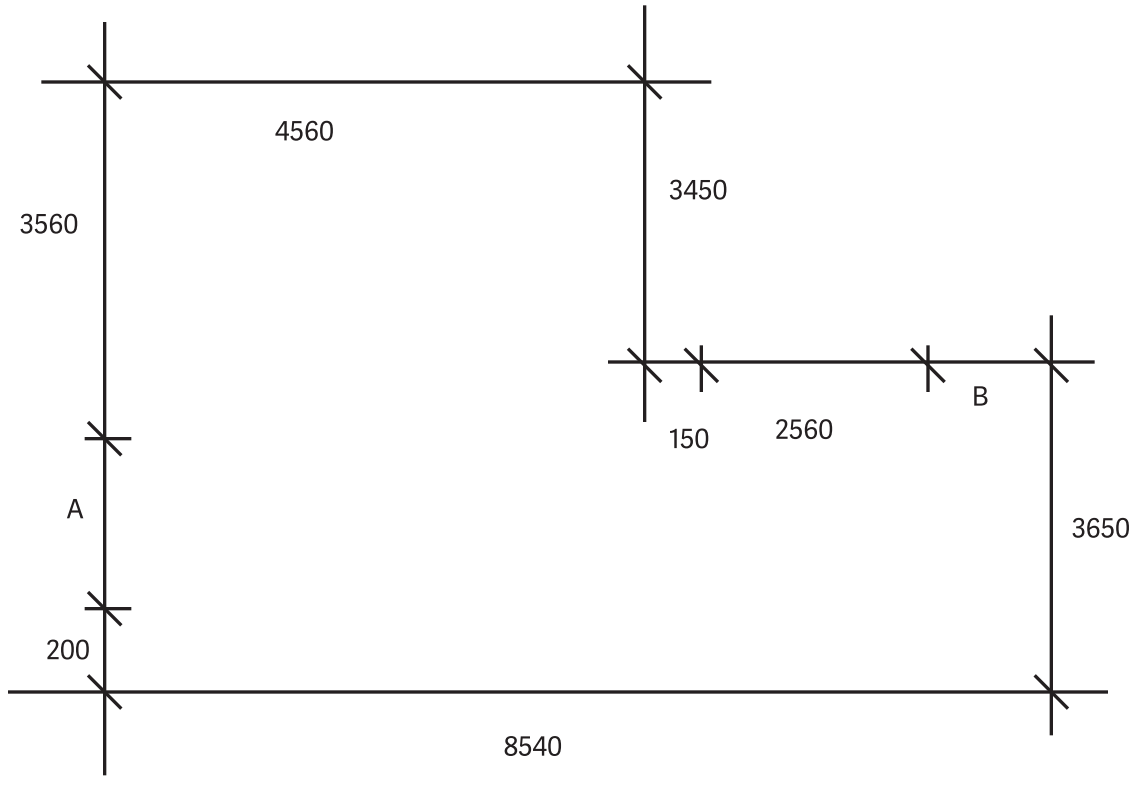
A) _____



B) _____

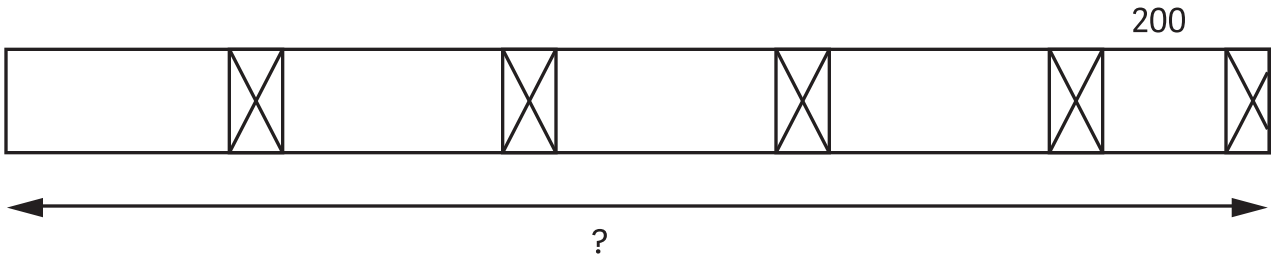


12. Laske puuttuvat mitat A ja B ilman laskinta.

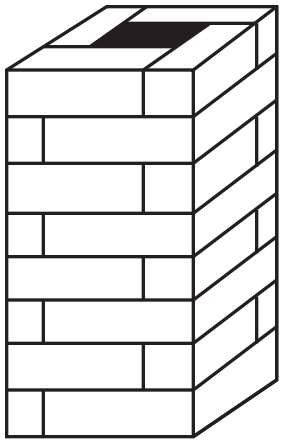


A) _____ B) _____

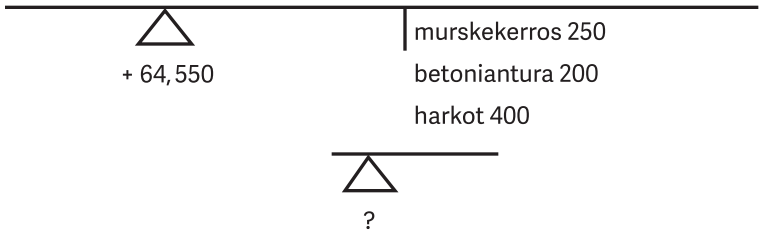
13. Mikä on alajuoksun pituus, kun runkotolpat on tehty jaolla K600?



14. Kuinka monta tiiltä tarvitaan oheiseen rakennelmaan?



15. Mikä on kaivusyvyys, kun maanpinnan korko on tasolaserin mukaan +64,550 ja tilaa on jätettävä murskekerrokselle, betonianturalle ja harkoille (korkeudet ilmoitettu kuvassa)? Huom. Maanpinnan korko on ilmoitettu metreinä, muiden millimetreinä.



16. Yksi täystiili painaa 3,2 kg ja reikätiili 2,8 kg. Käytössäsi on peräkärry, jonka kantavuus on 587 kg. Kuinka monta

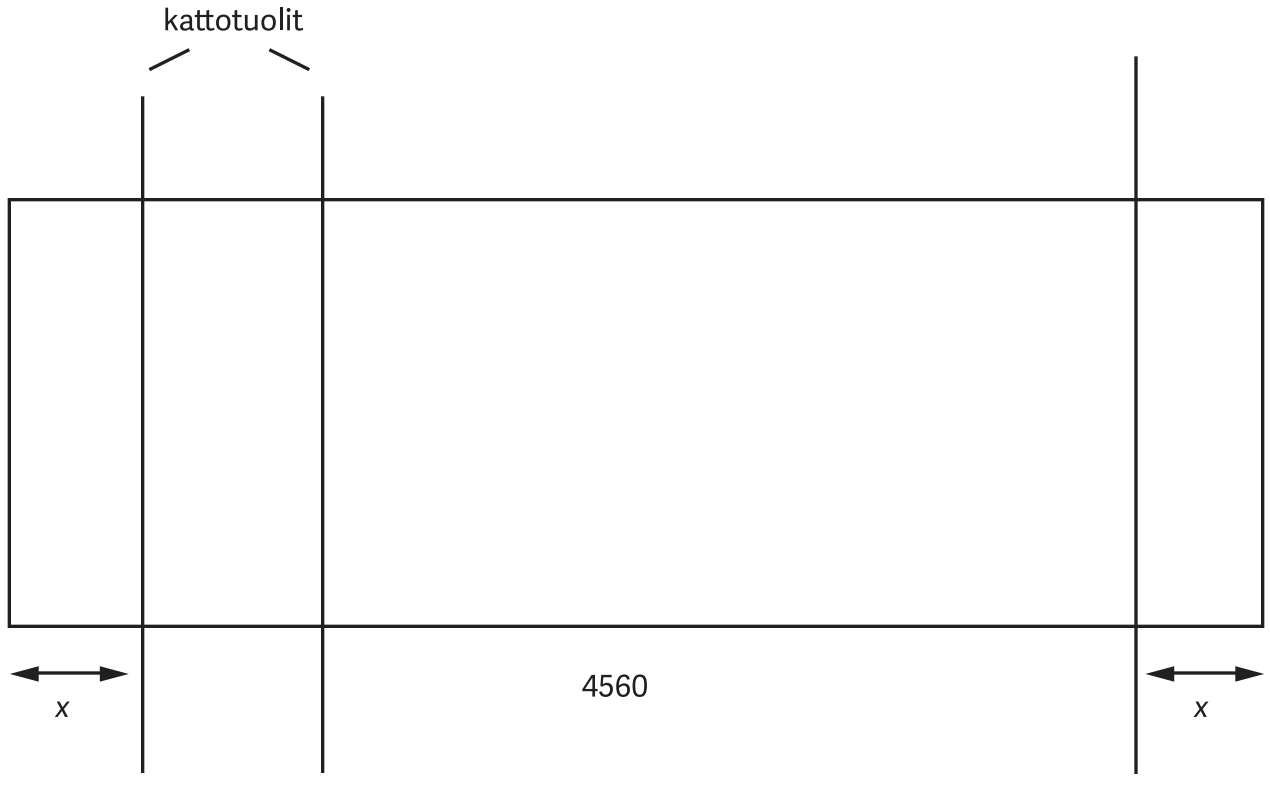
a) täystiiltä kärryyn voi pakata _____

b) reikätiiltä kärryyn voi pakata? _____

17. Kuvan rakennelmaan halutaan kattotuolit symmetrisesti jaolla K600.

a) Kuinka monta kattotuolia tarvitaan? Seinän pituus on 4 560. _____

b) Mikä on reunan ja reunimmaisen kattotuolin etäisyys *x*, kun sen halutaan olevan sama molemmissa reunoissa? _____

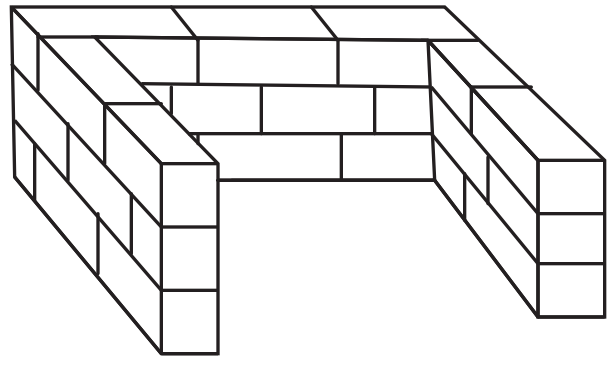


18. Maalin riittävyys on 12 m^2/l, ja maalattavan alueen pinta-ala on 90 m^2. Minkä kokoinen purkki maalia kannattaa ostaa, jotta maalia jäisi mahdollisimman vähän yli? Kaupassa olevat vaihtoehdot ovat: 0,9 l, 2,7 l, 7,2 l, 9 l ja 18 l.

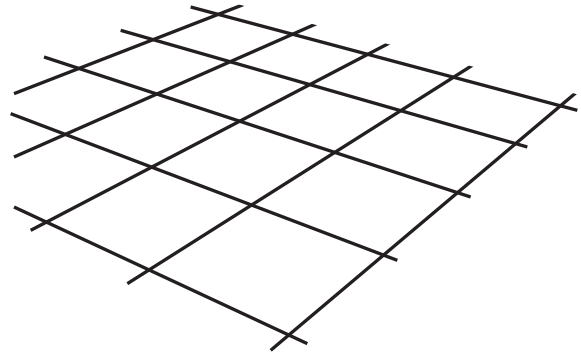
_____

19. Kuinka paljon oheinen rakennelma painaa, kun yhden tiilen paino on 3,2 kg?

_____



20. Rakennustyömaalla betoniraudoituksessa harjaterästen keskeltä mitattuna terästen välimatkan tuli olla 200 mm. Mittasit, että teräksiä tulee 1 200 mm:n matkalle. Kuinka monta terästankoa tarvitset? Huomaa, että terästen määrä ei ole sama kuin välien määrä.



21. Yhden metrin pituinen harjaterästanko, jonka halkaisija on 20 mm, painaa hieman alle 1,5 kg.

Siltatyömaalle tarvitaan 140 harjaterästankoa, joiden halkaisija on 20 mm ja pituus 6 metriä. Pystytäänkö nämä nostamaan sillalle kerralla nosturilla, jonka nostokyky on 1 000 kg. Perustele laskemalla. Älä käytä laskinta tämän tehtävän ratkaisemiseen.

Päässälaskutekniikat

Työelämässä tulee usein eteen tilanteita, joissa pitää laskea jokin yksinkertainen laskutoimitus päässä. Voit toki kaivaa taskustasi matkapuhelimen ja laskea sillä, mutta tyylikkäämpää ja nopeampaa on hoitaa asia päässälaskulla.

Esimerkki 1

Kymmenellä kerrottaessa pilkku siirtyy yhden pykälän verran oikealle. Vastaavasti sadalla kerrottaessa pilkku siirtyy kahden pykälän verran, tuhannella kerrottaessa kolmen pykälän verran jne. Oivalsitko?

a) $10 \cdot 17 = 170$ b) $10 \cdot 0{,}56 = 5{,}6$

c) $1{,}453 \cdot 100 = 145{,}3$ d) $165 \cdot 10\,000 = 1\,650\,000$

Esimerkki 2

Kymmenellä jaettaessa pilkku siirtyy yhden pykälän verran vasemmalle eli luku pienenee. Vastaavasti sadalla jaettaessa pilkku siirtyy kahden pykälän verran ja tuhannella jaettaessa kolmen pykälän verran. Oivalsitko?

a) $56 : 10 = 5{,}6$ b) $1\,900 : 100 = 19$ c) $0{,}065 : 10 = 0{,}0065$ d) $650 : 1\,000 = 0{,}650$

Esimerkki 3

Ensin on osattava täysillä kympeillä kertominen. Ratkaistaan seuraava lasku päässä:
$11 \cdot 30 = ?$

Ajatellaan mielessä ensin lasku $11 \cdot 3$ ja kerrotaan tulos vielä kymmenellä:
$11 \cdot 3 \cdot 10 = 330$

Täysillä kympeillä kertominen on siis varsin helppoa. Sitä täytyykin käyttää apukeinona isoilla luvuilla kertoessa, kuten huomaat seuraavasta esimerkistä.

Esimerkki 4

Ratkaistaan siis vaikeampi lasku:
$34 \cdot 12 = ?$

Nyt kannattaa muuttaa toinen kertoja täysiksi kympeiksi ja hajottaa lasku osiin:
$30 \cdot 12 + 4 \cdot 12 = ?$

Kertominen on täysien kymppien ansiosta helppoa, ja hetken päästä aivosi palauttavat vastauksen:
$30 \cdot 12 + 4 \cdot 12 = 360 + 48 = 408$

Esimerkki 5

Laske tehtävä:
$19 \cdot 25 = ?$

Jos toinen kertojista on hieman täyden kymmenen alapuolella, kannattaa menetellä seuraavasti:
$19 \cdot 25 = 20 \cdot 25 - 1 \cdot 25 = 500 - 25 = 475$

Huomasitko, mitä tapahtui? Muutimme toisen kertojan kahdeksikymmeneksi ja vastaavasti vähensimme tuloksesta yhden kerran luvun 25. Näin lopputulos ei muutu mutta päässälasku on paljon helpompaa.

Esimerkki 6

Desimaalilukujen kertolasku ei ole sen vaikeampaa. Erotetaan vain lopusta sama määrä desimaaleja kuin tulontekijöissä on yhteensä:
$1{,}9 \cdot 2{,}5 = 4{,}75$

Vertaa saatua tulosta edelliseen esimerkkiin.

Tehtäviä

Seuraavat tehtävät tulee tehdä ilman laskinta!

On hyvä arvioida vastauksen suuruusluokka ennen lopullisen vastauksen antamista.

1. Testaa ensin, ovatko kertolaskutaitosi kunnossa.

a) $5 \cdot 7 =$ _____ b) $3 \cdot 9 =$ _____ c) $4 \cdot 8 =$ _____ d) $98 \cdot 7 =$ _____ e) $5 \cdot 9 =$ _____

f) $7 \cdot 7 =$ _____ g) $7 \cdot 4 =$ _____ h) $5 \cdot 5 =$ _____ i) $10 \cdot 10 =$ _____ j) $6 \cdot 7 =$ _____

k) $4 \cdot 4 =$ _____ l) $8 \cdot 3 =$ _____ m) $8 \cdot 8 =$ _____ n) $3 \cdot 6 =$ _____ o) $6 \cdot 5 =$ _____

p) $5 \cdot 4 =$ _____ q) $8 \cdot 9 =$ _____ r) $3 \cdot 3 =$ _____ s) $4 \cdot 6 =$ _____ t) $9 \cdot 9 =$ _____

u) $1 \cdot 0 =$ _____ v) $9 \cdot 7 =$ _____ w) $6 \cdot 8 =$ _____ x) $7 \cdot 5 =$ _____

2. Laske ilman laskinta.

a) $20 \cdot 40 =$ _____ b) $30 \cdot 7 =$ _____ c) $40 \cdot 60 =$ _____

d) $20 \cdot 30 =$ _____ e) $30 \cdot 60 =$ _____ f) $70 \cdot 70 =$ _____

3. Laske ilman laskinta.

a) $20 \cdot 41 =$ _____ b) $30 \cdot 71 =$ _____ c) $40 \cdot 31 =$ _____

d) $60 \cdot 22 =$ _____ e) $30 \cdot 62 =$ _____ f) $70 \cdot 82 =$ _____

4. Laske ilman laskinta.

a) $15 \cdot 12 =$ _____ b) $18 \cdot 13 =$ _____ c) $18 \cdot 22 =$ _____

d) $25 \cdot 12 =$ _____ e) $32 \cdot 13 =$ _____ f) $36 \cdot 61 =$ _____

5. Laske ilman laskinta.

a) 28 · 9 = _____ b) 58 · 11 = _____ c) 48 · 19 = _____

d) 19 · 23 = _____ e) 87 · 31 = _____ f) 26 · 61 = _____

6. Laske ilman laskinta.

a) 65 · 42 = _____ b) 29 · 13 = _____ c) 98 · 21 = _____

d) 19 · 81 = _____ e) 14 · 15 = _____ f) 71 · 17 = _____

7. Laske ilman laskinta.

a) 1,8 · 16 = _____ b) 2,8 · 1,9 = _____ c) 0,8 · 1,9 = _____

d) 9,8 · 2,1 = _____ e) 15,1 · 2,1 = _____ f) 3,7 · 0,9 = _____

8. Laske ilman laskinta.

a) 400 : 20 = _____ b) 10 : 20 = _____ c) 6000 : 50 = _____

d) 50 : 20 = _____ e) 60 : 40 = _____ f) 6400 : 80 = _____

Kirjoita seuraaviin tehtäviin laskulausekkeet ja ratkaise lasku päässälaskuna

9. Tarvitset terassin rakentamiseen 300 metriä lautaa.
Kuinka paljon laudat maksavat, kun laudan metrihinta on 1,2 euroa? _____

10. Jarruttoman peräkärryn kantavuus on 500 kg.
Kuinka monta 25 kg:n pihalaattaa voit kuljettaa kärryllä laillisesti? _____

11. Valutyö on valmis alkamaan. Valun mitat ovat 10 cm x 5 m x 11 m.

a) Kuinka monta kuutiometriä tilaat betonia? _____
(Kiinnitä huomiota yksiköihin!)

b) Mikä on betonierän kustannus, kun hinta on 180 euroa/m^3? _____

12. Yhtä lautametriä kohden varataan 4 rst-ruuvia. Kuinka paljon edellisen tehtävän terassiin tulevat ruuvit maksavat, kun ruuveja myydään 250 kappaleen paketeissa hintaan 25 euroa/pkt?

---

13. Työhuoneen (15 m^2) lattia uusitaan. Laminaatin hinta on 9,9 euroa neliimetriltä, ja sitä myydään 3,2 m^2:n paketeissa. Mikä laminaatin hinnaksi tulee?

---

14. Samaisen työhuoneen kattoon laitetaan myös uudet kattolevyt. Kattolevyn hinta on 10,9 €/m^2, ja sen pakkauskoko on 2,1 m^2. Kuinka paljon rahaa kattolevyihin on varattava?

---

15. Maalin riittävyys on 6 m^2/l. Talon pinta-ala ikkunoineen on 300 m^2, ja ikkunoiden pinta-ala on 100 m^2. Maali myydään 9 litran purkeissa. Kuinka monta maalipurkkia ostat?

---

16. Kiukaan teho on 9 kW, ja sitä käytetään 5 tunnin ajan.

a) Kuinka paljon kiukaan kuluttama sähkö enintään maksaa, kun yhden kilowatti-tunnin hinta on 0,11 euroa?

---

b) Miksi sähköä ei oikeasti kulu niin paljon kuin a-kohta antaa ymmärtää?

---

17. Kellari oli rankkasateiden johdosta täyttynyt vedellä. Kellarista imetään vettä pois uppopumpun avulla. Pumppu kykenee siirtämään vettä 6 m^3/h. Kellarin mitat ovat 2 m x 4 m x 1,9 m. Kuinka kauan kellarin tyhjentäminen kestää? (Voit käyttää tämän tehtävän ratkaisemiseen laskinta.)

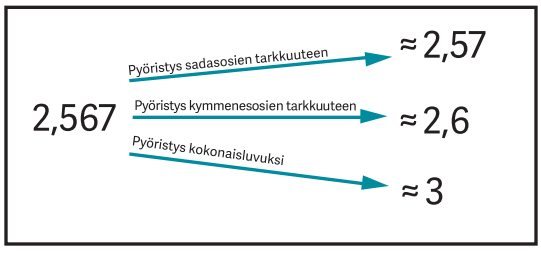
Pyöristäminen ja vastauksen tarkkuus

Pyöristämisellä tarkoitetaan lukujen muuntamista helpommin käsiteltävään muotoon. Jotta vastauksen tarkkuus ei olennaisesti muuttuisi, suoritetaan pyöristäminen vasta lopullisessa vastauksessa.

Pyöristämisen perussääntö on seuraava:

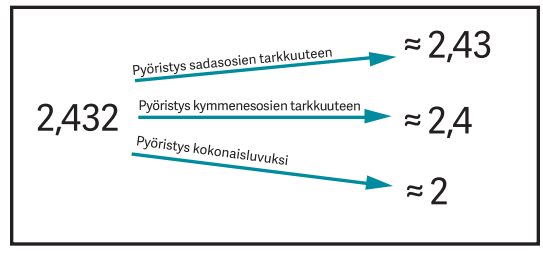
Jos viimeinen pois jätettävä numero on 5 tai sitä isompi, pyöristetään ylöspäin.

Esimerkiksi



Jos viimeinen pois jätettävä numero on alle 5, pyöristetään alaspäin.

Esimerkiksi



Pyöristäminen merkitsevien numeroiden perusteella

Merkitsevillä numeroilla tarkoitetaan kaikkia numeroita paitsi kokonaislukujen oikeassa reunassa olevia nollia ja desimaalilukujen vasemmassa reunassa olevia nollia.

Esimerkki 1

Pyöristä seuraavat luvut kolmen merkitsevän numeron tarkkuuteen:

a) 23,587

Erotetaan luvun vasemmalta puolelta kolme merkitsevää numeroa ja suoritetaan pyöristys:
23,587 ≈ 23,6

b) 145 865

Pyöristys tehdään samoin kuin edellisessä kohdassa:
145 865 ≈ 146 000

c) 1,009

Jälleen kerran pyöristäminen tehdään samoin kuin edellisissä kohdissa. Huomaa, että nollat ovat tässä tapauksessa merkitseviä:
1,009 ≈ 1,01

d) 0,0012309

Koska luvun edessä olevat nollat eivät ole merkitseviä, pyöristys tehdään seuraavalla tavalla:
0,0012309 ≈ 0,00123

e) 1,00003

Erotetaan luvun vasemmalta puolelta kolme merkitsevää numeroa ja suoritetaan pyöristys:
1,00003 ≈ 1,00.

Vastauksen tarkkuus riippuu laskettavien lukujen tarkkuudesta. Pääsääntöisesti lopullinen vastaus ilmoitetaan epätarkimman luvun mukaan.

Esimerkki 2

Laske laskutoimitukset ja pyöristä tulos epätarkimman lähtöarvon mukaan.

a) $2{,}5 + 3{,}21 = 5{,}71 \approx 5{,}7$

b) $10{,}23 \cdot 2{,}546 = 26{,}04558 \approx 26{,}05$

Desimaalilukujen tarkkuus voidaan määritellä myös seuraavan taulukon mukaisesti:

	Kymmenes-osan tarkkuus	Sadasosan tarkkuus	Tuhannesosan tarkkuus	Kymmenes-tuhannes-osan tarkkuus
	TAI	TAI	TAI	TAI
	Yhden desimaalin tarkkuus	Kahden desimaalin tarkkuus	Kolmen desimaalin tarkkuus	Neljän desimaalin tarkkuus
26,357214681349	26,4	26,36	26,357	26,3572
1,555555555	1,6	1,56	1,556	1,5556
10,0909090	10,1	10,09	10,091	10,0909
3,99999	4,0	4,00	4,000	4,0000
0,00057890	0,0	0,00	0,001	0,0006

Esimerkki 3

Laske huoneen kuutiotilavuus, kun huoneen pituus on 6,8 m, leveys 5,2 m ja korkeus 2,56 m.

Ratkaisu: $6{,}8\ \text{m} \cdot 5{,}2\ \text{m} \cdot 2{,}56\ \text{m} = 90{,}5216\ \text{m}^3 \approx 90{,}5\ \text{m}^3$

Esimerkki 4

Laske katon pinta-ala, kun harjan pituus on 13,2 m ja lappeen pituus 6,15 m.

Ratkaisu: $13{,}2\ \text{m} \cdot 6{,}15\ \text{m} = 81{,}18\ \text{m}^2 \approx 91\ \text{m}^2$

Esimerkki 5

Jos luvut pyöristetään ennen laskemista, lopullisen vastauksen tarkkuus heikkenee.

Huoneen mitat: leveys 5,25 m, pituus 7,45 m

Pinta-ala: $5{,}25\ \text{m} \cdot 7{,}45\ \text{m} = 39{,}1125\ \text{m}^2 \approx 39{,}11\ \text{m}^2$

$5{,}3\ \text{m} \cdot 7{,}5\ \text{m} = 39{,}75\ \text{m}^2 \approx 39{,}8\ \text{m}^2$

Lisätietoa: Jos vastaus saadaan pelkästään yhteen- tai vähennyslaskujen avulla, tulos ilmoitetaan usein yhtä monen desimaalin tarkkuudella kuin epätarkimmassa lähtöarvossa on.

Jos vastauksen saamiseen tarvitaan kerto- tai jakolaskua, tulos ilmoitetaan yhtä monen merkitsevän numeron tarkkuudella kuin epätarkin lähtöarvo.

Jos olet epävarma vastauksen tarkkuudesta,
ilmoita tulos mieluummin liian tarkasti kuin liian epätarkasti.

Tehtäviä

1. Pyöristä seuraavat luvut sadasosan ja tuhannesosan tarkkuuksiin.

	sadasosien tarkkuudella	tuhannesosien tarkkuudella
0,268123		
0,005972		
0,025197		
2,386145		
28,35971		

2. Pyöristä seuraavat luvut yhden desimaalin tarkkuuteen ja kolmen merkitsevän numeron tarkkuuteen.

	yhden desimaalin tarkkuus	kolmen merkitsevän numeron tarkkuus
21,145		
389,93		
48,257		
2,9569		
3,0159		

3. Ilmoita seuraavat mittaustulokset järkevällä tarkkuudella:

Huoneen pinta-ala on 18,5327 m^2. _____

Pöydän leveys on 80,245 cm. _____

Kuivan mäntylaudan kuutiopaino on 551,587 kg/m^3. _____

Saunan tilavuus on 20,5423 m^3. _____

Paneelia tarvitaan 55,6954 m^2. _____

Kaakeloinnin sauman leveys on 7,954 mm. _____

4. Laske ilman laskinta kappalehinta sentin tarkkuudella.

a) 200 kpl ankkuriruuveja maksaa 9,99 €. _____

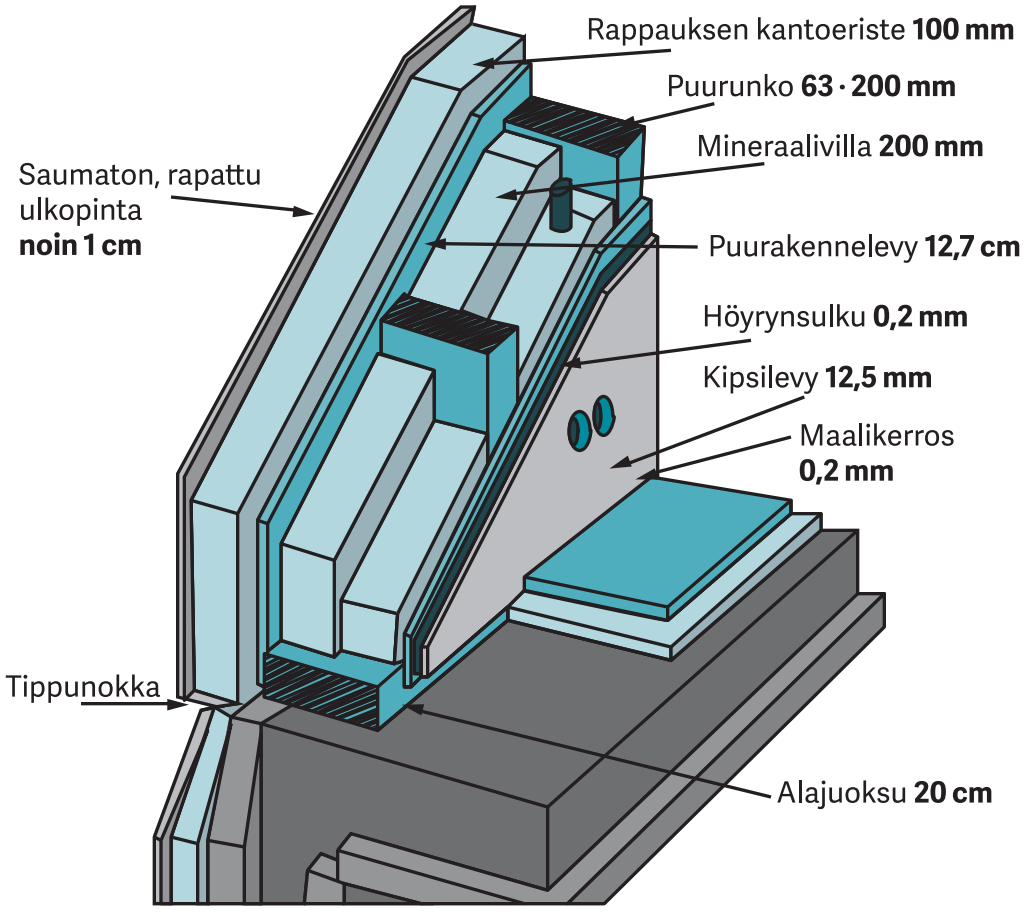
b) 250 kpl ankkurinauloja maksaa 21,95 €. _____

c) 50 kpl ikkunapeltiruuveja maksaa 4,99 €. _____

Voit helpottaa päässälaskua laskemalla ensin, kuinka paljon 2 ankkuriruuvia maksaa.

Voit helpottaa päässälaskua laskemalla ensin, kuinka paljon 1 000 ankkurinaulaa maksaa.

5. Kuinka paksu seinä on senttimetrin tarkkuudella? *Huomaa, että kaikki mitat eivät ole samassa yksikössä. Joitain mittoja voi lisäksi tarvita useamman kerran. Joitain mittoja taas ei välttämättä tarvita lainkaan.*



Laskutoimitus:

_____

Vastaus oikein pyöristettynä: _____

6. Rakennuksen ulkoseinien paksuus on 38,0 cm, ja sen pohja on suorakulmion (suorakaiteen) muotoinen. Rakennuksen ulkomitat ovat 12,55 x 15,30 metriä.
Laske rakennuksen

a) ulkopinta-ala _____

b) sisäpinta-ala. _____

Ilmoita vastaukset yhtä tarkasti kuin lähtöarvot (yhtä monen merkitsevän numeron tarkkuudella).

7. Huone on neliön muotoinen. Seinien pituudet ovat tarkalleen 300,2 cm. Kattoon laitetaan ohut lista. Laske ilman laskinta, kuinka monta senttimetriä listaa tarvitaan yhteensä. Ilmoita tulos oikealla tarkkuudella.

Laskutoimitus: _____ = _____

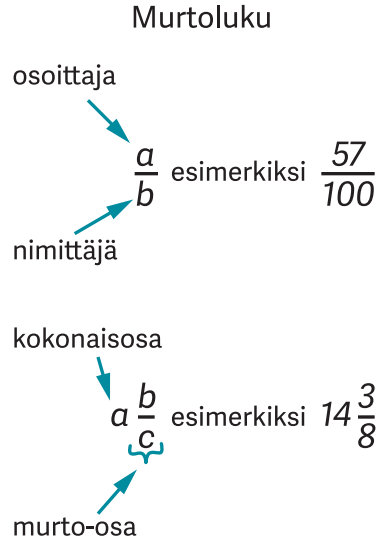
Vastaus pyöristettynä: _____

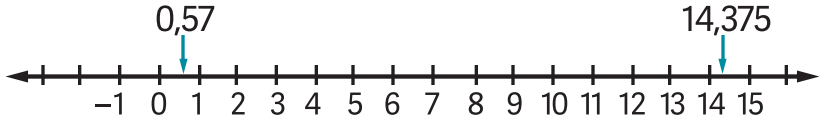
Neliössä on tarkalleen neljä sivua. Toisin sanoen neliössä on 4,000... sivua. Luku 4 ei siis ole mittaustulos eikä siten vaikuta pyöristyksen tarkkuuteen.

8. Janita ja Nohandra asentavat laminaattilattiaa. Janita mittasi, että lattiaan tarvitaan 106,0 cm pitkä laminaatin palanen. Janita huusi sirkkelin ääressä olleelle Nohandralle: "Leikkaa noin 106 cm pitkä pala!" Hetken kuluttua Nohandra toi 106,3 cm pitkän laminaatin palasen Janitalle, joka ei saanutkaan sitä mahtumaan paikalleen.
Perustele, kumpi työntekijä teki virheen? Miten virheen syntyminen olisi saatu estetyksi?

Murtoluvut

Murtolukuja esiintyy jokapäiväisessä elämässämme. Esimerkiksi kaupassa tuote voidaan myydä puoleen hintaan tai rakennusmääräys voi olla sellainen, että tonttipinta-alasta kolme neljäsosaa pitää jäädä vapaaksi rakennuksista. Lisäksi aina, kun jokin mitta on jaettu väleihin, voidaan ajatella, että kyseessä on murtoluku. Murtolukujen ymmärtäminen helpottaa laskemista ja nopeuttaa suuruuksien arviointia.





Murtoluku sekaluvuksi

Murtoluvun muuntaminen sekaluvuksi perustuu siihen, että murtoluku on toinen nimitys jakolaskulle.

Esimerkiksi murtoluvun $\frac{17}{5}$ muunto sekaluvuksi:

$$\frac{17}{5} = \frac{5 + 5 + 5 + 2}{5}$$

$$= 3\frac{2}{5}$$

Sekaluku murtoluvuksi

Kun sekaluvun kokonaisosan ja nimittäjän tulo lisätään osoittajaan, saadaan murtoluvun **osoittaja.** Murtoluvun **nimittäjä** pysyy samana kuin se oli sekaluvussa.

$$4\frac{2}{11} = \frac{4 \cdot 11 + 2}{11} = \frac{46}{11}$$

Huomaa:

$$\frac{46}{11} = \frac{11 + 11 + 11 + 11 + 2}{11}$$

$$= 4\frac{2}{11}$$

Murtoluvun laventaminen

Laventamisessa sekä osoittaja että nimittäjä kerrotaan samalla luvulla.

Laventaminen merkitään murtoluvun vasempaan ylälaitaan.

Esimerkiksi murtoluvun $\frac{2}{3}$ laventaminen neljällä:

$$^{4)}\ \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3}$$

$$= \frac{8}{12}$$

Murtoluvun supistaminen

Supistamisessa sekä osoittaja että nimittäjä jaetaan samalla luvulla.

Supistaminen merkitään murtoluvun oikeaan ylälaitaan.

Esimerkiksi murtoluvun $\frac{12}{108}$ supistaminen sievimpään mahdolliseen muotoon:

$$\frac{12}{108}\ ^{(2} = \frac{6}{54}\ ^{(2}$$

$$= \frac{3}{27}\ ^{(3} = \frac{1}{9}$$

Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku

Samannimiset murtoluvut

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6}{3}$$

$$= 2$$

Murtoluvuilla eri nimittäjä

Murtoluvut on lavennettava samannimisiksi:

$$^{d)}\ \frac{a}{b} + \ ^{b)}\ \frac{c}{d}$$

$$= \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$$

$$= \frac{ad + bc}{bd}$$

$$^{3)}\ \frac{2}{5} - \ ^{5)}\ \frac{6}{3} = \frac{6}{15} - \frac{30}{15}$$

$$= \frac{6 - 30}{15} = \frac{-14}{15}$$

$$= -\frac{14}{15}$$

Murtolukujen tulo

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{2} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 2} = \frac{20}{14} \overset{(2}{=} \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$$

Murtolukujen osamäärä

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

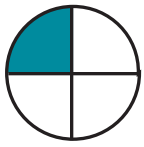
$$\frac{3}{7} : \frac{1}{4} = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{1} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$$

Tehtäviä

1. Kirjoita sekä murto- että desimaalilukuna seuraavat luvut ja opettele ne ulkoa, sillä niitä tarvitaan lähes päivittäin!

		murtoluku	desimaaliluku			murtoluku	desimaaliluku
a)	yksi kymmenesosa	$\frac{1}{10}$	0,1	g)	kaksi kolmasosaa		
b)	yksi sadasosa			h)	yksi neljäsosa		
c)	yksi tuhannesosa			i)	kolme neljäsosaa		
d)	yksi yhdesosa			j)	yksi kahdeksasosa		
e)	yksi kahdesosa			k)	yksi viidesosa		
f)	yksi kolmasosa			l)	yksi kuudesosa		

2. Kirjoita sekä murto- että desimaalilukuna, kuinka suuri osa kuviosta on tummennettu. Jos desimaaliluku ei ole päättyvä, pyöristä se tuhannesosien tarkkuuteen.

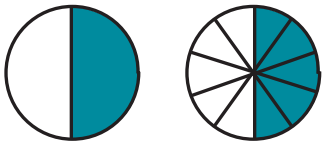
	a) 	b)	c)	d)	e)	f)
murto-luku						
desi-maali-luku						

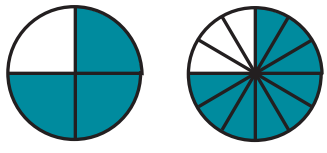
3. Kuvassa esitetään graafisesti kaksi murtolukuparia. Vastaa kuvien alapuolelle,

a) mitä murtolukua tummennetut alueet kuvaavat

b) millä luvulla pareista vasemmanpuoleinen pitää laventaa tai supistaa, jotta se muuttuu parikseen

c) mikä on näiden neljän murtoluvun summa.





a) _____ _____ _____ _____

b) _____ _____

c) _____

4.

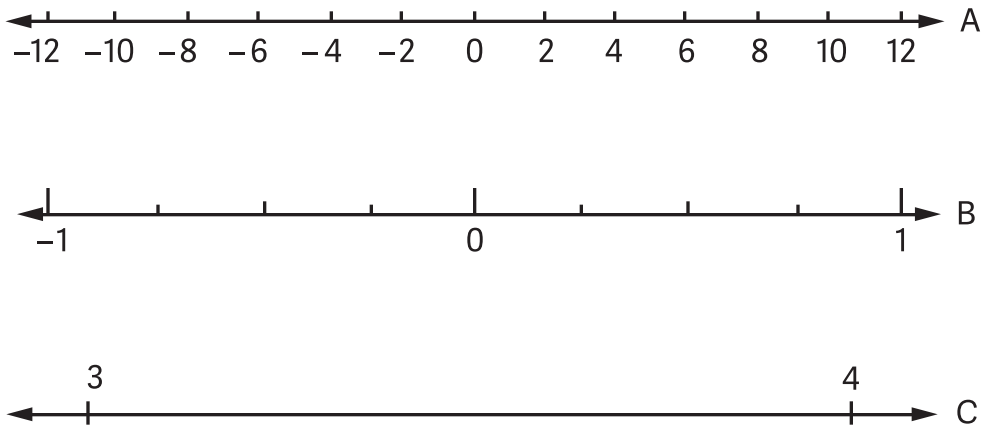
a) Sijoita luku yksi neljäsosaa lukusuoralle B niin tarkasti kuin pystyt.

b) Sijoita luvut ”miinus yksi kahdeksasosaa” ja ”miinus kolme kahdeksasosaa” lukusuoralle B niin tarkasti kuin pystyt (*tee tarvittaessa apuviivoja*).

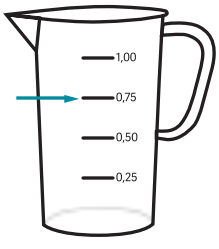
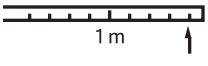
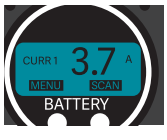
c) Sijoita luku $\frac{2}{3}$ lukusuoralle B niin tarkasti kuin pystyt (*tee tarvittaessa apuviivoja*).

d) Sijoita luvut $3\frac{5}{6}$ ja $\frac{15}{4}$ lukusuorille C ja A niin tarkasti kuin pystyt (tee tarvittaessa apuviivoja).

e) Sijoita luku $\frac{93}{10}$ jollekin alla olevista lukusuorista niin tarkasti kuin pystyt.



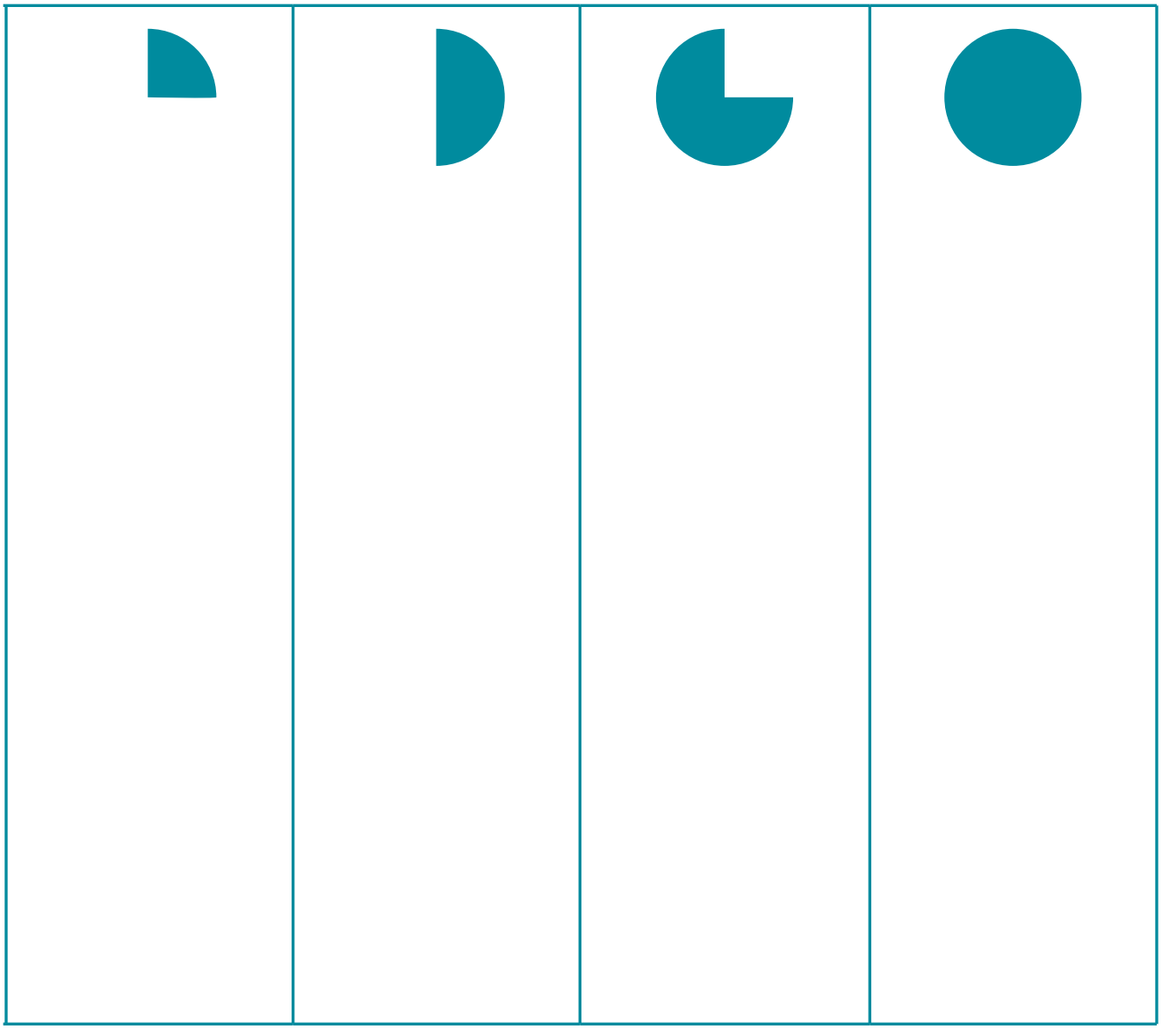
5. Taulukossa on kuvia erilaisista mitoista. Ilmoita seka-, murto- ja desimaalilukuna, mitä lukua mittaan merkityllä nuolella tarkoitetaan. Ilmoita myös puolen yksikön tarkkuudella luvun likiarvo.

	sekaluku	murtoluku	desimaaliluku	likiarvo puolen yksikön tarkkuudella
		$\frac{93}{10}$		
				
			126,4	126,5
		$\frac{9}{5}$		
				

6. Alapuolella on neljä kuviota. Kirjoita laatikkoon, mikä luku sopii mihinkin kuvioon.

4/4	0,75	50 %	2 000/4 000	9/12	100 %	4/16
75 senttiä	puoli euroa	3/4	4/8	kvartaali	10/10	yksi euro
3/12	5/20	0,5	neljännes	0,2500	kokonainen	6/8
yksi viidesosa	75 %	7 500/10 000				

Muista, että prosentti on murtolukuna sadasosa. Esimerkiksi 7 % = $\frac{7}{100}$.



7. Laita seuraavat luvut suuruusjärjestykseen aloittaen pienimmästä luvusta:

a) kolme miljoonaa

b) tuhat tuhatta

c) Kuusi tuhannesosaa

d) kaksi kolmasosaa

e) kuusisataa sadasosaa

f) viisisataa prosenttia

g) yksi neljäsosa

h) $\frac{9\,000}{1\,000\,000}$

i) 0,005

j) 13,99999

k) $14\frac{9}{1\,000}$

l) $14\frac{10}{100}$

m) –1

n) 0

---

8. Lavenna tai supista murtolukuja siten, että ne tulevat samannimisiksi. Kun olet laventanut murtoluvut, laita niiden väliin jokin seuraavista merkeistä: <, > tai =

a) $\frac{3}{4}$ ja $\frac{14}{24}$ _____

b) $\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{8}$ _____

c) $\frac{3}{5}$ ja $\frac{15}{25}$ ja $\frac{22}{50}$ _____

9. Laske ilman laskinta. Jos mahdollista, ilmoita vastaus sekalukuna. Sijoita vastaus tehtävän alapuolella olevalle lukusuoralle. Lukusuoran avulla opit hahmottamaan murtolukujen suuruusluokkia, mikä on tärkeä taito!

a) $\frac{2}{5} + \frac{6}{5} =$

b) $1\frac{2}{3} + 2\frac{4}{3} =$

c) $5\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3} =$

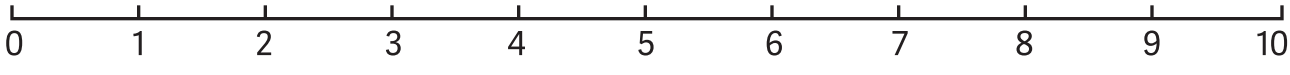
d) $2\frac{2}{5} - 1\frac{3}{5} =$

Muista, että nimittäjiä ei lisätä toisiinsa.

Voit laskea kokonaisosat erikseen yhteen tai muuntaa sekaluvut murtoluvuiksi.

Voit vähentää kokonaisosat ensin ja murto-osat lopuksi.

Nyt kannattaa muuttaa sekaluku murtoluvuksi.



10. Laske ilman laskinta. Jos mahdollista, ilmoita vastaus sekalukuna. Sijoita vastaus tehtävän alapuolella olevalle lukusuoralle.

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{4} =$ _____

Lavenna murtoluvut ensin: lavennettaessa sekä osoittaja että nimittäjä kerrotaan samalla luvulla.

b) $1\frac{2}{10} + 2\frac{4}{5} =$ _____

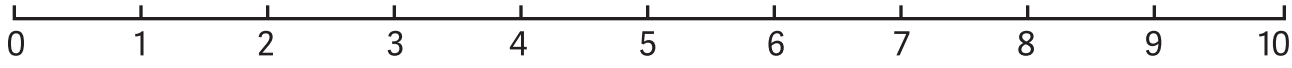
Voit laskea kokonaisosat erikseen yhteen tai muuntaa sekaluvut murtoluvuiksi.

c) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} =$ _____

Yhteiseksi nimittäjäksi tulee lukujen 4, 3 ja 5 tulo.

d) $2\frac{1}{4} - 1\frac{3}{5} =$ _____

Lavenna ensin murto-osat. Muunna sitten sekaluvut murtoluvuksi.



11. Laske ilman laskinta. Jos mahdollista, ilmoita vastaus sekalukuna.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} =$ _____

Kertolaskussa ei lavenneta.

b) $1\frac{2}{10} \cdot 2\frac{4}{5} =$ _____

Muunna aluksi sekaluvut murtoluvuksi.

c) $5\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3} =$ _____

Muunna aluksi sekaluvut murtoluvuksi.

d) $2\frac{1}{4} \cdot 6 =$ _____

Kuusi on sama asia kuin kuusi yhdesosaa.

12. Laske ilman laskinta. Jos mahdollista, ilmoita vastaus sekalukuna.

a) $\frac{2}{3} : \frac{5}{4} =$ _____

Jakolaskussa jakaja "käännetään ensin ympäri" eli jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla.

b) $1\frac{2}{10} : 2\frac{4}{5} =$ _____

Muunna aluksi sekaluvut murtoluvuksi.

c) $5\frac{4}{5} : 2\frac{1}{2} =$ _____

Muunna aluksi sekaluvut murtoluvuksi.

d) $2\frac{3}{4} : 4 =$ _____

Neljä on sama asia kuin neljä yhdesosaa.

13. Laske ilman laskinta. Ilmoita tulos joko murto-, seka- tai desimaalilukuna. Sijoita vastaus lopuksi johonkin tehtävän alapuolella olevista lukusuorista.

Jos lasku tuntuu vaikealta, muunna se ensin murtoluvuksi. Tämä helpottaa usein laskemista!

a) 1,5 + 1,25 = _____

b) 2,2 · 3 = _____

c) 0,75 + 0,8 = _____

d) 0,5 : 2 = _____

e) 0,3 · 0,2 = _____

Huomaa, että vastaus ei ole 0,6.

f) 1,14 : 2 = _____

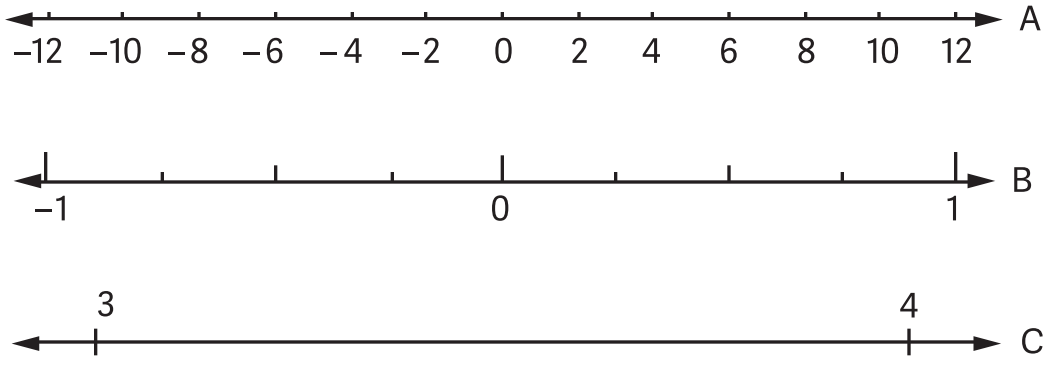
Tämä voi olla helpompi murtolukuna

g) 1,25 : 0,75 = _____

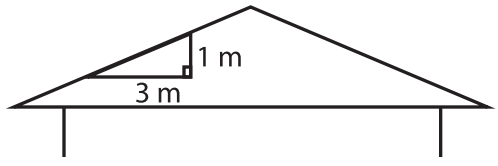
Tämä on murtoluvuiksi muutettuina helppo lasku.

h) 4 : 1,2 = _____

Tämä on murtoluvuiksi muutettuina helppo lasku.



14. Harjakaton kaltevuus ilmoitetaan usein suhdelukuna. Yleinen kaltevuus on 1 : 3. Tämä tarkoittaa sitä, että 3 metrin matkalla katto nousee 1 metrin.



a) Ilmoita murtolukuna, kuinka monta metriä katto nousee yhden metrin matkalla.

b) Kuinka monta prosenttia (= sadasosaa) katon kaltevuus on? Ilmoita tulos yhden prosentin tarkkuudella.

c) Erään salaojaputken asennusohjeessa kerrottiin, että putki pitäisi asentaa 1–2 %:n kaltevuudella. Ilmoita murtolukuina, millä välillä kaltevuuden tulee olla.

d) Mario asensi salaojaputken silmämääräisesti. Rakennustarkastaja mittasi, että 2 500 cm:n matkalla putki laski 50 cm. Kuinka monta sadasosaa (eli prosenttia) kaato oli?

15. Kuinka paljon tie laskee 200 m:n matkalla? (Vrt. tehtävään 14.)

16. Riston palkka on 2 450 € ja siitä menee veroihin $\frac{1}{4}$.
Kuinka paljon Ristolle jää palkasta käteen?

17. Näyttelytilan seinän pinta-ala on 50 m². Seinästä $\frac{1}{10}$ maalataan vaaleansiniseksi, $\frac{2}{5}$ tummansiniseksi ja loput valkoiseksi. Kuinka paljon tarvitaan kutakin maalia kun maalin riittävyys on 1 l/8 m² (1 litra maalia riittää 8 neliömetrille)?

18. Erään huoneen korkeus on 2,70 m. Seinään halutaan tehdä puolipanelointi siten, että paneelin osuus seinän korkeudesta olisi $\frac{3}{8}$. Kuinka korkea paneloinnista tulee?

19. Viinimarjoista saatiin 6,5 litraa mehua. Tyhjiä pulloja oli käytössä seuraavasti: 5 kpl 0,75 l, 4 kpl $\frac{1}{2}$ l ja 5 kpl $\frac{1}{3}$ l. Mahtuiko kaikki mehu pulloihin? Perustele laskemalla ilman laskinta.

20. Omakotitalon rakentaminen valmiista talopaketista jakaa kustannukset karkeasti siten, että talopaketin osuus kokonaiskustannuksista on $\frac{1}{3}$.

a) Jos rakentamisen budjetti on 360 000 euroa, kuinka paljon talopaketti saa maksaa?

b) Jos talopaketin hinta on 82 500 euroa, kuinka paljon pitää varata muihin kustannuksiin?

c) Rakentamisen kokonaiskustannukset olivat 425 000 euroa. Kuinka suuret olivat kustannukset ilman talopakettia?

21. Talon arvioidut valmistuskustannukset ovat 280 000 €. Rakenteiden osuus kustannuksista on $\frac{3}{5}$, työn osuus $\frac{1}{4}$ ja kalusteiden osuus $\frac{1}{10}$. Loput kuluvat muihin kustannuksiin.

a) Mikä on muiden kustannusten osuus murtolukuna?

b) Mikä on työn osuus euroina?

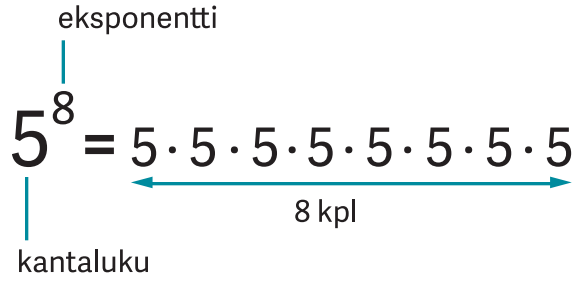
c) Työn osuus kasvaa rakennusurakan aikana 10 000. Mikä on tällöin työn osuus kustannuksista murtolukuna?

22. Auton polttoainetankin tilavuus on 70 litraa. Polttoainemittari näyttää, että polttoainetta on jäljellä neljäsosa. Kuinka paljon tankin tankkaaminen täyteen maksaa, kun polttoaineen hinta on 1,545 €/l?

Potenssit ja juuret

Potenssi

Potenssi on lyhennetty merkintä tulolle, jossa kantalukua kerrotaan itsellään eksponentin ilmoittaman luvun verran.



Yllä oleva lauseke luetaan ”viisi potenssiin kahdeksan” tai ”viisi kahdeksanteen”.
Toista potenssia kutsustaan usein **neliöksi** ja kolmatta potenssia **kuutioksi**.
Esimerkiksi 3^2 on luvun kolme neliö ja 5^3 on luvun viisi kuutio.

Esimerkki

Laske a) 2^3 b) $(-1)^4$ c) -2^3

Ratkaisu:

a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

b) Kantaluku on –1, koska se on sulkujen sisällä.

$(-1)^4 = -1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$

c) Nyt kantalukuna ei olekaan –2 vaan pelkästään 2. Vastaus on negatiivinen.

$-2^3 = -(2 \cdot 2 \cdot 2) = -8$

Laskimessa potenssi merkitään näppäimellä x^y tai ^.

Tehtäviä

1. Yhdistä parit.

0^3	10^1	6^2	$(-3)^2$	-3^2	10^3	2^5
361 000	9	32	10	–9	0	

2. Laske ilman laskinta.

a) 3^2 = _____ b) 5^2 = _____ c) 1^3 = _____

d) 0^2 = _____ e) 2^4 = _____ f) $(-2)^3$ = _____

g) $(-5)^2$ = _____ h) -3^2 = _____ i) -4^2 = _____

3. Laske ilman laskinta.

a) Luvun 8 neliö on _____ b) Luvun 10 neliö on _____

c) Luvun –5 neliö on _____ d) Luvun 4 kuutio on _____

e) Luvun 3 kuutio on _____ f) Luvun –2 kuutio on _____

4. Muuta lausekkeet potenssimerkinnöiksi ja laske laskimella.

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ = _____ = _____

b) $(-4 \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot -4)$ = _____ = _____

c) $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ = _____ = _____

5. Laske laskimella. Jos vastaus on desimaaliluku, pyöristä se kahden desimaalin tarkkuudella.

a) 12^2 = _____ b) $2{,}3^4$ = _____ c) $(-1{,}1)^5$ = _____

d) $(3{,}2 + 1{,}5)^2$ = _____ e) $1{,}2^{10}$ = _____ f) $-0{,}99^0$ = _____

6. Laske ympyrän muotoisen johtimen poikkileikkauksen pinta-ala, kun johtimen säde on 0,75 mm.

Ympyrän pinta-ala (A) lasketaan kaavalla $A = \pi \cdot r^2$, missä
r = ympyrän säde.

---

7. Osakkeen arvo kaksinkertaistuu joka vuosi. Mikä on osakkeen arvo 7 vuoden kuluttua, kun sen arvo nyt on 1,50 €?

---

8. Tietokoneen arvon on arvioitu puolittuvan joka vuosi. Mikä on tietokoneen arvo 4 vuoden kuluttua, kun se nyt on 2 000 €?

---

9. Minna osallistuu punnerrushaasteeseen, jossa joka viikko tuplataan punnerrusten määrä. Ensimmäisellä viikolla punnerruksia tehdään kaksi päivässä. Toisella viikolla neljä päivässä jne. Kuinka monta punnerrusta Minna tekee päivässä

a) 5 viikon kuluttua _____ b) 10 viikon kuluttua? _____

10. Kuinka monta erilaista vastausriviä voi saada monivalintakokeesta, kun tehtäviä on kahdeksan ja vastausvaihtoehtoja kolme? _____

11. Miralla on matkalla mukanaan housuja, puseroita ja kenkäpareja kutakin 5 kappaletta. Kuinka monta asuyhdistelmää hän voi näistä muodostaa? _____

12. Kun A1-kokoinen arkki puolitetaan, saadaan A2-kokoinen arkki. Kun A2-arkki jaetaan kahtia, saadaan A3-kokoinen arkki jne. Kuinka monta A8-kokoista arkkia saadaan A1-arkista?

Lisätietoa: negatiivinen potenssi

Eksponentti voi olla myös negatiivinen. Kun eksponenttina on negatiivinen luku, otetaan kantaluvusta käänteisluku, joka korotetaan positiiviseen potenssiin.

Esimerkki

Laske a) 3^{-2} b) 2^{-3}.

Ratkaisu:

a) Kantaluvun 3 käänteisluku on $\frac{1}{3}$, $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$

b) $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$

1. Yhdistä parit (osa luvuista jää ilman paria).

2^{-2}	10^{-2}	3^{-1}	7^{-2}	$(-3)^{-2}$	$(-2)^{-3}$	$-\frac{1}{9}$
$\frac{1}{3}$	9	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	0,01	$\frac{1}{49}$	0	$-\frac{1}{8}$

2. Laske ilman laskinta.

a) $5^{-2} =$ _____ b) $8^{-2} =$ _____ c) $1^{-3} =$ _____ d) $(-1)^{-3} =$ _____

e) $(-3)^{-2} =$ _____ f) $5^{-3} =$ _____

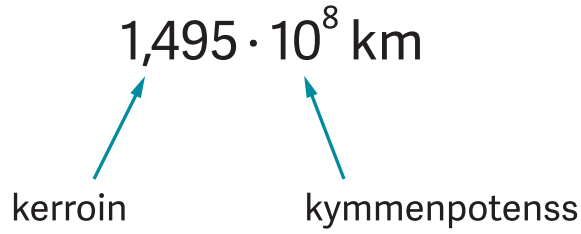
3. Laske laskimella. Anna vastaus desimaalilukuna kahden desimaalin tarkkuudella.

a) $1{,}6^{-3} =$ _____ b) $0{,}5^{-4} =$ _____ c) $1{,}5^{-8} =$ _____ d) $0{,}7^{-4} =$ _____

Kymmenpotenssi

Kymmenpotenssimerkintöjä käytetään, kun luku on hyvin pieni tai vastaavasti hyvin suuri. Laskin näyttää isot luvut kymmenpotenssimuodossa.

Esimerkiksi Maapallon etäisyys Auringosta (149 500 000 km) on kymmenpotenssimuodossa $1{,}495 \cdot 10^8$ km.



Suurilla luvuilla kymmenen eksponentti on positiivinen ja pienillä luvuilla negatiivinen. Kun luvun kymmenen eksponentti on positiivinen, se kertoo, kuinka monta nollaa kertoimen perään tulee tai kuinka monen pykälän verran pilkkua siirretään oikealle.

Esimerkki 1

Kirjoita ilman potenssimerkintää luvut a) $2 \cdot 10^5$ ja b) $3{,}135 \cdot 10^7$.

Ratkaisu:

a) $2 \cdot 10^5 = 200\,000$ b) Pilkku siirtyy 7 pykälän verran oikealle, eli $3{,}135 \cdot 10^7 = 31\,350\,000$.

Kun luvun kymmenen eksponentti on negatiivinen, se kertoo, kuinka monta nollaa tulee kertoimen eteen tai kuinka monen pykälän verran pilkkua siirretään vasemmalle.

Esimerkki 2

Kirjoita ilman potenssimerkintää luvut a) $3 \cdot 10^{-5}$ ja b) $6{,}15 \cdot 10^{-8}$.

Ratkaisu:

a) $3 \cdot 10^{-5} = 0{,}00003$ b) $6{,}15 \cdot 10^{-8} = 0{,}0000000615$

Laskimessa on kymmenpotenssille oma pikanäppäin:

EXP tai 10^x

Esimerkiksi potenssimerkintä $2 \cdot 10^{-5}$ voidaan kirjoittaa laskimella:

2 EXP 5

Huom.! Kymmenpotensseja käytetään apuna myös yksiköiden etuliitteissä (kilo, giga jne.).

Tehtäviä

1. Yhdistä parit.

Maapallon halkaisija (km)	$5 \cdot 10^{-4}$
Maapallon väkiluku	$1{,}3 \cdot 10^{4}$
Ihmisen keskimääräinen hiusmäärä	$7 \cdot 10^{9}$
Bakteerin koko (m)	$2 \cdot 10^{-6}$
Kynnen paksuus (m)	$1 \cdot 10^{5}$

2. Kirjoita ilman potenssimerkintää.

a) $4 \cdot 10^{5}$ = _____ b) $8 \cdot 10^{7}$ = _____ c) $1{,}25 \cdot 10^{4}$ = _____

d) $6{,}7 \cdot 10^{8}$ = _____ e) $2 \cdot 10^{-3}$ = _____ f) $5 \cdot 10^{-6}$ = _____

g) $3{,}89 \cdot 10^{-4}$ = _____ h) $7{,}2 \cdot 10^{-7}$ = _____

3. Kirjoita seuraavat luvut kymmenpotenssimuodossa.

a) 4 000 000 = _____ b) 3 400 000 000 = _____

c) 2,5 miljoonaa = _____ d) 0,000005 = _____

e) 0,0000012 = _____ f) 0,00189 = _____

4. Vuonna 2013 Suomessa tuotettiin tuulivoimalla $7{,}7 \cdot 10^{11}$ Wh sähköenergiaa. Riittääkö tämä energia kattamaan Ahvenanmaan sähkönkulutuksen, kun se vuonna 2013 oli yhteensä $268 \cdot 10^{9}$ Wh?

_____

5. Raudan tiheys on noin $7{,}9 \cdot 10^3$ kg/m^3.

a) Ilmoita luku ilman kymmenpotensseja. _____

b) Betonielementtiin tuli 790 kg rautaa. Elementin tilavuus oli 2 400 litraa. Kuinka monta litraa betonia elementtiin tarvittiin? Anna sekä laskutoimitus että vastaus

_____

6. Laske seuraavat laskut laskimella ja ilmoita vastaukset kymmenpotenssimuodossa.

a) $5{,}3 \cdot 10^8 \cdot 10^{10} =$ _____

b) $1{,}12 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}53 \cdot 10^{-8} =$ _____

c) $6{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 9{,}88 \cdot 10^{10} =$ _____

7. Ihmisessä on bakteereja noin 10^{15} kappaletta. Yksi bakteeri painaa keskimäärin $1{,}5 \cdot 10^{-12}$ g. Kuinka monta kilogrammaa ihmisessä olevat bakteerit painavat yhteensä?

_____

8. Lämpötilan noustessa kappaleet laajenevat. Raudan lämpölaajenemiskerroin on $12 \cdot 10^{-6}$ 1/°C. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että jos käytössä on 2 metriä pitkä rautatanko ja lämpötila nousee 1 celsiusasteen, rautatanko muuttuu 2 metriä + $2 \cdot 12 \cdot 10^{-6}$ metriä pitkäksi.

Täydennä aukkokohdat yllä olevan tiedon perusteella:

Luku $12 \cdot 10^{-6}$ on ilman kymmenpotensseja _____. Kesällä auringossa rautatiekiskon lämpötila voi olla +60 °C ja talvella –40 °C. Jos rautatiekisko on –40 °C:n lämpötilassa tasan 12,000 metriä pitkä, se on kesällä +60 °C:n lämpöisenä

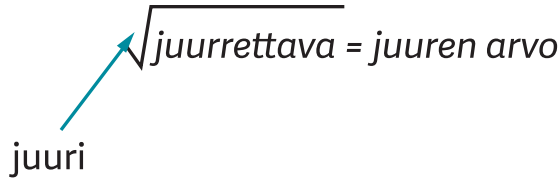
_____ + _____ = _____ metriä pitkä.

Pituusero on näin ollen _____ metriä eli _____ senttimetriä.

Juuret

Juuren ottaminen on käänteinen operaatio potenssiin korottamiselle.

Yleisimmin käytetty juuri on toinen juuri. Tällöin juuresta käytetään nimitystä neliöjuuri ($\sqrt{\ }$).



Esimerkki 1

Kuinka paljon on $\sqrt{9}$?

Ratkaisu:

On mietittävä, mikä luku toiseen potenssiin korotettuna on 9.

Eli $\sqrt{9} = 3$, koska $3^2 = 9$.

Neliöjuuri on siis toiseen potenssiin korottamisen vastatoimenpide. Huomaathan, että $\sqrt[2]{\ } = \sqrt{\ }$.

Neliöjuuren lisäksi on olemassa muitakin juuria. Esimerkiksi kolmas juuri on nimeltään **kuutiojuuri** ja sitä merkitään $\sqrt[3]{\ }$.

Esimerkki 2

$\sqrt[3]{8} = 2$, koska $2^3 = 8$.

Muut juuret ovat nimeltään neljäs juuri, viides juuri jne. Huom.! Kun juuri on parillinen luku ($\sqrt{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[6]{\ }$), juurrettava ei voi olla negatiivinen luku.

Esimerkki 3

Juureen $\sqrt{-4}$ ei ole ratkaisua, koska $(-2)^2 = 4$ ja $2^2 = 4$, joten kumpikaan luvuista –2 tai 2 ei käy vastaukseksi.

Tehtäviä

1. Yhdistä parit.

$\sqrt{-25}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt[3]{27}$	$\sqrt[3]{-8}$	$\sqrt[4]{16}$	$\sqrt{36}$
1	–2	6	–5	ei vastausta	3	5	2

2. Laske seuraavat juuret ilman laskinta.

a) $\sqrt{4}$ = _____ b) $\sqrt{25}$ = _____ c) $\sqrt{49}$ = _____

d) $\sqrt{81}$ = _____ e) $\sqrt{-36}$ = _____ f) $\sqrt{0}$ = _____

3. Laske seuraavat juuret laskimella. Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

a) $\sqrt{125}$ = _____ b) $\sqrt{450}$ = _____ c) $\sqrt{23\,000}$ = _____

d) $\sqrt[3]{345}$ = _____ e) $\sqrt[3]{4\,440}$ = _____ f) $\sqrt[3]{14\,930}$ = _____

4. Laske seuraavat juuret ilman laskinta.

a) $\sqrt[3]{1}$ = _____ b) $\sqrt[3]{1000}$ = _____ c) $\sqrt[3]{-1}$ = _____

5. Kirjoita juuren sisään juurrettava.

a) $\sqrt{}$ = 5 b) $\sqrt{}$ = 8 c) $\sqrt{}$ = 10 d) $\sqrt{}$ = 25

6. Neliön muotoisen tilan pinta-ala on 1 600 m^2. Mikä on tilan sivun pituus?

_____

7. Pihaan halutaan sadevesiallas, johon mahtuu 2 m^3 vettä. Altaasta halutaan kuution muotoinen. Mikä sadevesialtaan pituuden on oltava? Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.

8. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus (c) saadaan ratkaistuksi kaavalla

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$, kun kateettien sivujen pituudet (a ja b) tiedetään.

Laske hypotenuusan pituus, kun suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 2,5 m ja 3,5 m.

9. Kuution muotoisen vesiastian tilavuudeksi halutaan 200 litraa (0,2 m^3). Mikä kuution ulkosivun pituuden on oltava, kun astia tehdään betonista, jonka paksuudeksi tulee 5 cm?

10. Ratkaise seuraavat yhtälöt.

a) $x^2 = 25$

b) $x^4 = 256$

c) $2x^2 = -50$

d) $x^{10} = 1\,024$

2

Kerrannaisyksiköt

- Yksikkömuunnokset
- Yksiköiden yhdistäminen

Kilosta milleihin

Yksiköiden muuntamisessa on tärkeää ymmärtää etuliitteiden merkitys. Ymmärtämällä niiden merkityksen voit muuttaa mitä tahansa yksikköä kerrannaisyksiköihinsä. Ainut ulkoa opittava asia on seuraava taulukko:

Etuliite ja sen merkki	Kerroin
Kilo, k	1000
Hehto, h	100
Deka, da	10
Desi, d	0,1
Sentti, c	0,01
Milli, m	0,001

Usein yksikkömuunnoksissa taulukkoa käytetään vaakatasossa, jolloin pilkun siirto on helpompaa:

k kilo	h hehto	da deka	*perusyksikkö* *– ei etuliitettä*	d desi	c sentti	m milli

Etuliitteitä käytetään nimensä mukaisesti. Etuliitteen merkki laitetaan halutun yksikön eteen, jolloin se toimii kertoimena kyseiselle yksiköllle.

Olet ehkä kuullut käytettävän esimerkiksi termiä kiloeuro. Jos pankkitililläsi on 2 k€, sen saldo näyttää 2 000 €. Juuri samalla periaatteella kaksi kilogrammaa on kaksi *tuhatta* grammaa. Osaisit siis muuttaa kilogrammat grammoiksi, vaikket tietäisi grammoista yhtään mitään! Tässä piilee etuliitteiden käytön hienous.

Esimerkki 1

Kuinka monta halkoa on hehtohalko?

Tapa 1
Koska hehto-etuliitteen kerroin on 100, hehtohalko on 100 halkoa.

Tapa 2
Siirretään pilkkua alla olevan taulukon avulla. Perusyksikkö on tässä tapauksessa halko. Jotta päästään hehto-kertoimesta perusyksikköön, pilkkua on siirrettävä kahden pykälän verran oikealle:

k kilo	h hehto	da deka	*perusyksikkö* *– ei etuliitettä*	d desi	c sentti	m milli

1 hehtohalko = 100 halko(a)

Esimerkki 2

Varastorakennuksen pituus voi olla 400 dekatuumaa. Kuinka pitkä se on tuumina?

Tapa 1
Koska deka-etuliitteen kerroin on 10, dekatuuma merkitsee 10 tuumaa.
Yhteensä siis 400 · 10 tuumaa = 4 000 tuumaa.

Tapa 2
Perusyksikkö on tässä tapauksessa tuuma. Jotta päästään deka-kertoimesta perusyksikköön, pilkkua on siirrettävä kerran oikealle:

k kilo	h hehto	da deka	*perusyksikkö* *– ei etuliitettä*	d desi	c sentti	m milli

400 dekatuumaa = 4 000 tuumaa

Esimerkki 3

Matkaa lähimpään saareen on 340 millimeripeninkulmaa. Kuinka monta meripeninkulmaa pitää siis purjehtia?

Tapa 1
Koska milli-etuliitteen kerroin on 0,001, millimeripeninkulma merkitsee 0,001 meripeninkulmaa.

Yhteensä siis $340 \cdot 0{,}001$ mpk = 0,34 mpk.

Tapa 2
Perusyksikkö on tässä tapauksessa meripeninkulma. Jotta päästään milli-kertoimesta perusyksikköön, pilkkua on siirrettävä kolmen pykälän verran vasemmalle:

k kilo	h hehto	da deka	*perusyksikkö* *– ei etuliitettä*	d desi	c sentti	m milli

:10 :10 :10

340 millimeripeninkulmaa = 0,34 mpk

Pikosta teraan

Laajennetaan hieman äsken opittua etuliitteiden taulukkoa. Otetaan taulukkoon mukaan kertoimet biljoonasosasta biljoonaan:

Etuliite ja sen merkki	Kerroin
Tera, T	1 000 000 000 000 = 10^{12}
Giga, G	1 000 000 000 = 10^{9}
Mega, M	1 000 000 = 10^{6}
Kilo, k	1000
Hehto, h	100
Deka, k	10
Desi, d	0,1
Sentti, c	0,01
Milli, m	0,001
Mikro, μ	0,000001 = 10^{-6}
Nano, n	0,000000001 = 10^{-9}
Piko, p	0,000000000001 = 10^{-12}

Taulukko voidaan esittää myös vaakatasossa:

T tera	G giga	M mega	k kilo	h hehto	da deka	*perus-yksikkö – ei etu-liitettä*	d desi	c sentti	m milli	µ mikro	n nano	p piko

Et välttämättä tarvitse näitä kaikkia jokapäiväisessä elämässäsi, mutta melko usein niihin kuitenkin törmää. Kaverisi on saattanut vaikkapa ostaa uuden tietokoneen, jossa on 3,2 gigahertsin suoritin ja 2 teratavun kovalevy, tai ehkä juuri tänään vaihdoit työkoneeseen hydrauliöljyn suodatinta, jossa on teksti ”30 µm”. Ymmärsitkö, mitä näillä tarkoitetaan?

Esimerkki 1

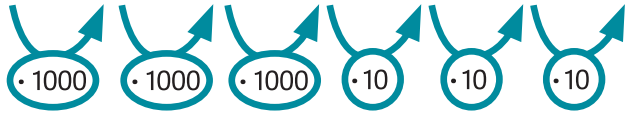
Muuta pyydettyyn yksikköön.

a) Kuinka monta tavua tietoa on 3 Tt:n kiintolevyssä?

Tapa 1
Tietoa on $3 \cdot 1\,000\,000\,000\,000$ tavua eli 3 biljoonaa tavua.

Tapa 2
Katsotaan taulukosta, kuinka monen pykälän verran pilkkua on siirrettävä:

T tera	G giga	M mega	k kilo	h hehto	da deka	*perusyksikkö – ei etuliitettä*	d desi	c sentti	m milli	µ mikro	n nano	p piko



Pilkkua on siirrettävä yhteensä kahdentoista pykälän verran oikealle.

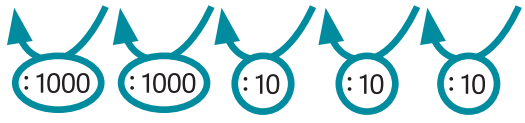
3 Tt = 3 000 000 000 000 t

b) Suomen valtion budjetti oli vuonna 2014 oli noin 54 030 000 000 euroa. Ilmaise tämä gigaeuroina.

Tapa 1
Yksi gigaeuro on miljardi euroa, joten budjetti oli 54,03 G€.

Tapa 2
Katsotaan taulukosta, kuinka monen pykälän verran pilkkua on siirrettävä, jotta perusyksiköstä päästään gigaan:

T tera	G giga	M mega	k kilo	h hehto	da deka	*perusyksikkö* *– ei etuliitettä*	d desi	c sentti	m milli	µ mikro	n nano	p piko



Pilkkua on siirrettävä yhteensä yhdeksän pykälän verran vasemmalle.

54 030 000 000 € = 54,03 G€.

c) Maalikerroksen paksuus oli 35 µm. Kuinka monta millimetriä se on?

Tapa 1
Mikrometri on millimetrin tuhannesosa, joten 35 mikrometriä on 35 · 0,001 mm = 0,035 mm.

Tapa 2
Katsotaan taulukosta, kuinka monen pykälän verran pilkkua on siirrettävä, jotta mikrosta päästään milleihin:

T tera	G giga	M mega	k kilo	h hehto	da deka	*perusyksikkö* *– ei etuliitettä*	d desi	c sentti	m milli	µ mikro	n nano	p piko

Pilkkua on siirrettävä kolmen pykälän verran vasemmalle, joten

35 µm = 0,035 mm.

Tehtäviä

1. Muunna kilowateiksi (kW).

a) 1 400 W = _____ b) 800 W= _____ c) 12 000 W = _____

d) 5 300 W = _____ e) 40 W = _____ f) 360 W = _____

2. Muunna milliampeereiksi (mA).

a) 0,62 A = _____ b) 0,050 A = _____ c) 1,35 A = _____

d) 0,003 A = _____ e) 1,6 A = _____ f) 2,600 A = _____

3. Muunna kiloeuroiksi (k€).

a) 6 000 € = _____ b) 600 € = _____ c) 590 € = _____

d) 12 500 € = _____ e) 4 500 € = _____ f) 150 € = _____

4. Muunna millibaareiksi (mbar).

a) 0,4 bar = _____ b) 0,090 bar = _____ c) 1,4 bar = _____

d) 0,0015 bar = _____ e) 1,4968 bar = _____ f) 0,06641 bar = _____

5. Suodattimiin on usein merkitty suodatuskyky mikroneina eli mikrometreinä. Erääseen suodattimeen jäävät kiinni 50 µm:n ja sitä isommat partikkelit. Kuinka paljon tämä on millimetreinä?

_____

6. Täydennä taulukko.

Kerroin	Etuliite ja sen merkki
0,001	
	Mikro, μ
1 000 000	
	Nano, n
	Giga, G
100	
	Deka, da

7. Vanhahkon tietokoneen kovalevy on kooltaan 180 Gt.

a) Kuinka monta kirjoitelmaa tietokoneen muistiin mahtuu, jos jokainen kirjoitelma on kooltaan keskimäärin 18 kt?

b) Kuinka monta hd-tason elokuvaa muistiin mahtuu, jos jokainen elokuva on kooltaan keskimäärin 2400 Mt?

8. Erään pelikäyttöön tarkoitetun tietokoneen kellotaajuus on 3,9 GHz. Kuinka moninkertainen sen taajuus on verrattuna Suomen vaihtosähköverkon taajuuteen, joka on 50 Hz?

9. Paine ilmoitetaan usein megapascaleina (MPa). Ilmakompressorin letkussa oli varoitus, jonka mukaan paine saa olla korkeintaan 1,2 MPa. Kuinka monta baaria tämä on, jos 1 bar = 100 kPa?

10. Henkilönostimen hydrauliletku oli mitoitettu kestämään jatkuvaa käyttöä 35 MPa:n paineella. Kestääkö letku, kun jatkuva paine järjestelmässä kasvaa paineensäätimen hajoamisen vuoksi 4,6 hehtobaariin?

Pituus

Pituuden perusyksikkö on metri. Kaikki muut kerrannaisyksiköt ovatkin jo tuttuja viime luvun perusteella:

km kilometri	hm hehtometri	dam dekametri	m metri	dm desimetri	cm senttimetri	mm millimetri

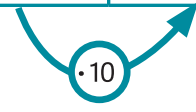
Pituus on yksiulotteinen suure, joten sen suhdeluku muunnoksissa on 10. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että jokaisessa muutoksessa vierekkäisestä yksiköstä toiseen pilkku siirtyy samaan suuntaan yhden pykälän verran. Tuntuuko hankalalta? Seuraavat esimerkit valaisevat asian.

Esimerkki 1

Muunna 2,4 cm millimetreiksi.

Katso taulukkoa. Huomaat, että millimetrit ovat yhden pykälän päässä senttimetreistä oikealle. Siirretään siis pilkkuakin yhden pykälän verran oikealle:

km kilometri	hm hehtometri	dam dekametri	m metri	dm desimetri	cm senttimetri	mm millimetri



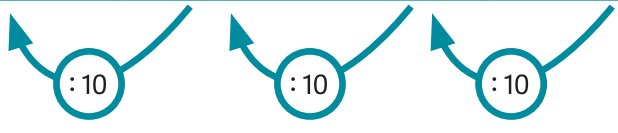
2,4 cm = 24 mm

Esimerkki 2

Muunna 3 m kilometreiksi.

Jotta metreistä päästään kilometreihin, pilkkua on siirrettävä kolmen pykälän verran vasemmalle. (Pilkkuhan oli kokonaisluvun perässä, vaikkei sitä sinne merkitäkään!)

km kilometri	hm hehtometri	dam dekametri	m metri	dm desimetri	cm senttimetri	mm millimetri



3 m = 0,003 km

Käytännön työelämässä on hyvä osata ulkoa yleisimmät mittayksiköiden muunnokset. Jokaisen rakennusalalla työskentelevän on kyettävä muuttamaan millimetrit senttimetreiksi ja metrit senttimetreiksi silmänräpäyksessä, ilman kulmien kurtistelua. Käytännön tilanteita helpottaa, jos muistaa seuraavan taulukon sisällön:

Työmaakopin huoneentaulu

1 km = 1 000 m
1 m = 100 cm = 1 000 mm
1 cm = 10 mm

Tehtäviä

1. Arvioi seuraavien asioiden pituutta. Voit myös tarkistaa arviosi mittaamalla tai tarkistamalla karttapalvelusta.

Asia	Arvio	Mitattu arvo
Pulpetin leveys		
Luokan leveys		
Matkapuhelimen mitat (pituus, leveys, korkeus)		
Etäisyys Oulusta Kokkolaan		
Etäisyys Tampereelta Lieksaan		
Kynän pituus		
Pääsi ympärysmitta		

2. Valitse sopiva yksikkö kuhunkin kohtaan.

a) Naulan pituus on 100 _____ b) Metallisorvin kärkiväli on 1 _____

c) Auton pituus on 4 500 _____ d) Huonekorkeus on 25 _____

e) Siltarummun halkaisija on 25 _____ f) Kitaran kielen pituus on 100 _____

3. Muunna senttimetrit metreiksi.

a) 150 cm = _____ b) 80 cm = _____ c) 250 cm = _____

d) 40 cm = _____ e) 5 cm = _____ f) 1 cm = _____

4. Muunna millimetrit senttimetreiksi.

a) 16 mm = _____ b) 50 mm = _____ c) 2,50 mm = _____

d) 400 mm = _____ e) 1 500 mm = _____ f) 0,1 mm = _____

Massa

Massan perusyksikkö on gramma. Kaikki muut kerrannaisyksiköt ovatkin jo tuttuja viime luvun perusteella:

kg kilo- gramma	hg hehto- gramma	dag deka- gramma	g gramma	dg desi- gramma	cg sentti- gramma	mg milli- gramma

Massa on yksiulotteinen suure, joten sen suhdeluku muunnoksissa on 10. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että jokaisessa muutoksessa vierekkäisestä yksiköstä toiseen pilkku siirtyy samaan suuntaan yhden pykälän verran. Katso tarkasti oheisia esimerkkejä: yksikkömuunnokset tapahtuvat täsmälleen samalla tavalla kuin pituudessakin. Nyt vain metrin tilalla on gramma.

Esimerkki 1

Muunna 2 400 g kilogrammoiksi.

Katso taulukkoa. Huomaat, että kilogrammat ovat kolmen pykälän päässä vasemmalle grammoista. Pilkkua on siis siirrettävä kolmen pykälän verran vasemmalle:

kg kilo- gramma	hg hehto- gramma	dag deka- gramma	g gramma	dg desi- gramma	cg sentti- gramma	mg milli- gramma

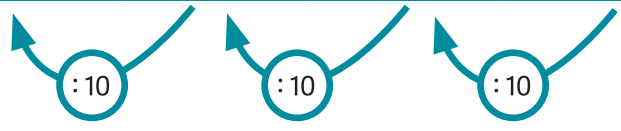
2 400 g = 2,4 kg

Esimerkki 2

Muunna 350,5 mg grammoiksi.

Jotta milligrammoista päästään grammoihin, pilkkua on siirrettävä kolmen pykälä verran vasemmalle:

kg kilo- gramma	hg hehto- gramma	dag deka- gramma	g gramma	dg desi- gramma	cg sentti- gramma	mg milli- gramma



350,5 mg = 0,3505 g

Esimerkki 3

Muunna 56 hg senttigrammoiksi.

Jotta hehtogrammoista päästään senttigrammoihin, pilkkua on siirrettävä neljän pykälän verran oikealle:

kg kilo- gramma	hg hehto- gramma	dag deka- gramma	g gramma	dg desi- gramma	cg sentti- gramma	mg milli- gramma

56 hg = 560 000 cg

Käytännön työelämässä on hyvä osata ulkoa yleisimmät massayksiköiden muunnokset. Oheinen taulu on hyvä painaa pysyvästi muistiin. Mukana on myös yleisesti käytetty tonni, josta käytetään epävirallisia lyhenteitä ”t” ja ”tn”.

Työmaakopin huoneentaulu

1 tn = 1 000 kg
1 kg = 1 000 g
1 g = 0,001 kg
1 g = 1 000 mg

Tehtäviä

1. Arvioi seuraavien tavaroiden massa. Voit mahdollisesti myös punnita osan tavaroista arviointisi jälkeen.

Tavara	Arvioitu massa	Punnittu massa
Yksi 4 tuuman naula		
Tyhjä 33 cl:n alumiinitölkki		
Matkapuhelin		
Pistokärkinen teräslapio		
4 m:n pätkä ”kakkosnelosta”		
Tyhjä kahvikuppi		
Kottikärryt		

2. Muunna grammat kilogrammoiksi.

a) 150 g = _____ b) 80 g = _____ c) 250 g = _____

d) 1 440 g = _____ e) 45 500 g = _____ f) 51 g = _____

3. Muunna kilogrammat grammoiksi.

a) 16 kg = _____ b) 5 kg = _____ c) 0,45 kg = _____

d) 0,050 kg = _____ e) 1,56 kg = _____ f) 3,25 kg = _____

4. Muunna grammat milligrammoiksi.

a) 5,6 g = _____ b) 0,63 g = _____ c) 7 g = _____

d) 0,050 g = _____ e) 0,4 g = _____ f) 5 g = _____

5. Muunna kilogrammat tonneiksi.

a) 15 000 kg = _____ b) 865 kg = _____ c) 4 900 kg = _____

d) 50 kg = _____ e) 1 600 kg = _____ f) 120 000 kg = _____

6. Muunna pyydettyyn yksikköön.

a) 160 cg = _____ dg b) 8,65 kg = _____ g c) 49 hg = _____ kg

d) 126 mg = _____ cg e) 56,4 dag = _____ g f) 5 g = _____ tn

7. Auton jarruttoman peräkärryn kantavuus on 350 kg. Kuinka monta 800 g:n teräsplootua voit lastata kärryysi kantavuuden rajoissa?

_____

8. Henkilönostimeen saa ottaa kuor maa 0,340 tonnia. Kuinka monta perusketterää (m = 80 kg) rakennusmiestä voi tulla kyytiin?

_____

Vetomitat

Vetomittojen perusyksikkö on litra. Muunnoksiin tarvittava taulukko on jo melkoisen tuttu edellisiltä sivuilta:

kl kilolitra	hl hehtolitra	dal dekalitra	l litra	dl desilitra	cl senttilitra	ml millilitra

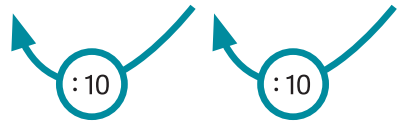
Yksikkömuunnosten tekninen toteutus on jälleen täysin sama kuin pituuden ja massankin kanssa, kuten voit huomata seuraavista esimerkeistä.

Esimerkki 1

Muunna 15 senttilitraa litroiksi.

Jotta päästään litroihin, pilkkua on siirrettävä kahden pykälän verran vasemmalle:

kl kilolitra	hl hehtolitra	dal dekalitra	l litra	dl desilitra	cl senttilitra	ml millilitra



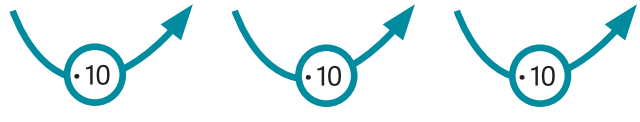
15 cl = 0,15 l

Esimerkki 2

Muunna 14,5 litraa millilitroiksi.

Jotta päästään millilitroihin, pilkkua on siirrettävä kolmen pykälän verran oikealle:

kl kilolitra	hl hehtolitra	dal dekalitra	l litra	dl desilitra	cl senttilitra	ml millilitra



14,5 l = 14 500 ml

Seuraavan taulun muunnokset tulee muistaa ulkoa salamannopeasti.

Työmaakopin huoneentaulu

1 l = 10 dl = 100 cl
1 l = 1 000 ml
1 cl = 10 ml

Tehtäviä

1. Arvioi seuraavien asioiden tilavuus sopivalla yksiköllä:

Asia	Arvioitu tilavuus
Tiili	
Jäätelöannos	
Kahvikuppi	
Lääkeruisku	
Mopon iskutilavuus	
Pesäpallo	

2. Muunna litroiksi.

a) 5,6 dl = _____ b) 5 600 ml = _____ c) 12 cl = _____

d) 0,5 dl = _____ e) 15 ml = _____ f) 1 ml = _____

3. Muunna desilitroiksi.

a) 15,6 l = _____ b) 560 ml= _____ c) 1,0 l = _____

d) 150 cl = _____ e) 80 ml = _____ f) 50 dal = _____

4. Muunna millilitroiksi.

a) 0,5 l = _____ b) 50 dl = _____ c) 1,0 l = _____

d) 75 cl = _____ e) 150 l = _____ f) 0,006 l = _____

Pinta-alan yksiköt

Pinta-alan yksikkö muodostuu käytettävästä pituuden yksiköstä korotettuna toiseen potenssiin. Kun valittu yksikkö korotetaan toiseen potenssiin, yksikön etuliitteeksi tulee ”neliö”.

Pinta-alamerkintöjä joutuu toisinaan muuntamaan joko isommiksi tai pienemmiksi. Esimerkiksi tonttien pinta-alat voidaan ilmoittaa sekä hehtaareina että neliömetreinä.

Pinta-alan muunnoksissa täytyy muistaa, että jokaisessa muutoksessa vierekkäisestä yksiköstä toiseen pilkku liikkuu kahden pykälän verran. Oheisen taulukon avulla muuntaminen onnistuu helposti.

km^2 neliökilometri	hm^2 = ha *neliöhehtometri* = hehtaari	dam^2 = a *neliödekametri* = aari	m^2 neliömetri =”neliö”	dm^2 neliödesimetri	cm^2 neliösenttimetri	mm^2 neliömillimetri

Työmaakopin huoneentaulu

Neliömetri on kooltaan 1 m x 1 m.
Aari on kooltaan 100 m^2 (10 m x 10 m).
Hehtaari on kooltaan 10 000 m^2 (100 m x 100 m).

Esimerkki 1

Peltoa on 0,2 ha. Kuinka monta aaria se on?

Nyt aarit ovat pykälän verran hehtaareista oikealle. Siirretään siis pilkkua kahden pykälän verran oikealle:

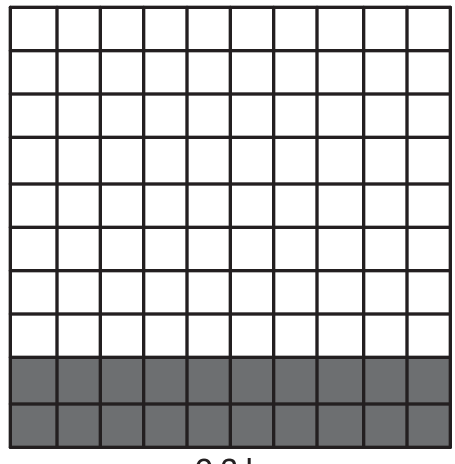
0,2 ha = 20 a.

km²	ha	a	m²	dm²	cm²	mm²

· 100

(pilkku siirtyy kahden pykälän verran)

Kuvassa havainnollistetaan hehtaarin suhdetta aariin.



0,2 ha

Esimerkki 2

Järven pinta-ala 40 km². Kuinka monta hehtaaria se on?

40 km² · 100 = 4 000 ha

km²	ha	a	m²	dm²	cm²	mm²

· 100

Esimerkki 3

Pellon ala on 2 aaria. Kuinka monta hehtaaria ala on?

2 a : 100 = 0,02 ha

Puhekielessä neliöllä tarkoitetaan samaa kuin 1 m².

Tehtäviä

1. Mikä yksikkö sopii luvun perään?

Esineet ja tarvikkeet:

a) Pöydän pinta-ala on 1,2 _____ b) Ikkunan koko on 1,68 _____

c) Lattiavahan menekki yhdellä vahauksella on 1 l / 29 _____

d) Erään sähköjohdon poikkipinta-ala on 1,5 _____

Rakennusten pinta-alat:

a) Kerrostalokaksion pinta-ala on 58 ____ b) Autotallin pinta-ala on 24 ____

c) Yrityksen varaston pinta-ala on 1 200 ____ d) Satamaterminaalin pinta-ala on 1,5 ____

Maa-alat ja vesistöt:

a) Omakotitalotontin koko on 0,2 _____ b) Kasvimaan koko on 2 _____

c) Järven pinta-ala on 56 _____

Ihminen

a) Käden pinta-ala on noin 1–2 _____ b) Kynnen pinta-ala on 1–2 _____

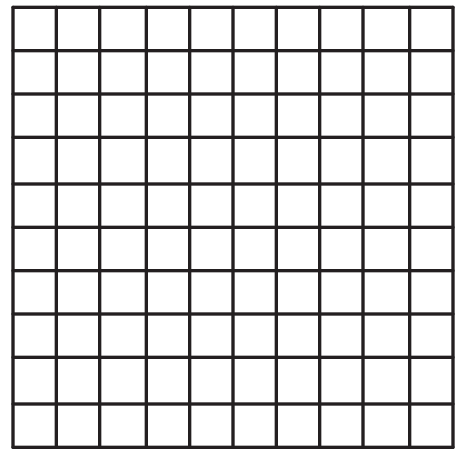
2. Muunna seuraavat luvut pienemmiksi yksiköiksi:

1 m^2	cm^2	mm^2
10 m^2	cm^2	mm^2
100 m^2	cm^2	mm^2
0,5 m^2	cm^2	mm^2
0,25 m^2	cm^2	mm^2
0,05 m^2	cm^2	mm^2

3. Muunna seuraavat luvut suuremmiksi yksiköiksi:

1000 mm^2	cm^2	m^2
100 mm^2	cm^2	m^2
10 000 mm^2	cm^2	m^2
900 mm^2	cm^2	m^2
50 000 mm^2	cm^2	m^2
45 000 000 mm^2	cm^2	m^2

4. Pituudessa yksiköiden välinen kerroin on kymmenen. Selitä ruudukon avulla, miksi pinta-alojen yksiköiden välinen kerroin on 100.



Tilavuuden yksiköt

Tilavuuden yksikkö muodostuu käytettävästä pituuden yksiköstä korotettuna kolmanteen potenssiin. Potenssiin korotettava yksikkö voi olla esimerkiksi metri (m), millimetri (mm) tai senttimetri (cm).

Kun valittu yksikkö korotetaan kolmanteen potenssiin, yksikön etuliitteeksi tulee ”kuutio”, esimerkiksi **kuutio**metri (m^3), **kuutio**millimetri (mm^3) tai **kuutio**senttimetri (cm^3).

Yleensä arkikielessä ei käytetä kuutiollisia mittoja vaan niin sanottuja vetomittoja, erityisesti litroja, desilitroja, senttilitroja ja millilitroja.

Työmaakopin huoneentaulu

Kuutio eli kuutiometri on kooltaan 1 m x 1 m x 1 m = 1 000 litraa.
Kuutiodesimetri on kooltaan 10 cm x 10 cm x 10 cm = 1 litra.

m^3 kuutiometri = "**kuutio**" = 1 000 litraa			dm^3 kuutio-desimeri = 1 litra			cm^3 kuutio-senttimetri			mm^3 kuutio-millimetri

· 1000

*(pilkkua siirretään **kolmen pykälän verran** oikealle)*

kl kilolitra = 1 000 litraa	hl hehto-litra	dal deka-litra	l litra = kuutio-desimetri	dl desi-litra	cl sentti-litra	ml millilitra

· 10

*(pilkkua siirretään **yhden pykälän verran** oikealle)*

Huomaathan, että 1 litra on sama kuin 1 dm^3.

Laskuesimerkkejä

1. Auton moottorin tilavuus on 1 995 cm^3. Kuinka paljon se on litroina?

Muunnetaan tilavuus ensin kuutiodesimetreiksi:

1 995 cm^3 : 1 000 = 1,995 dm^3

m^3			dm^3			cm^3			mm^3

: 1000

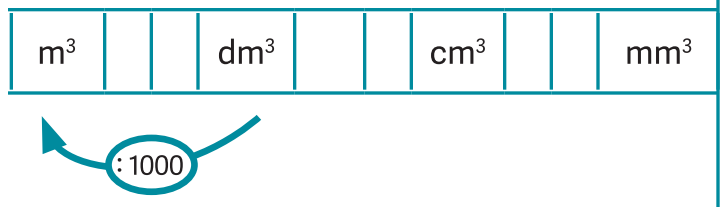
1 dm^3 = 1 litra, joten

1,995 dm^3 = 1,995 litraa

2. Jääkaapin koko on 400 l. Kuinka paljon se on kuutiometreinä?

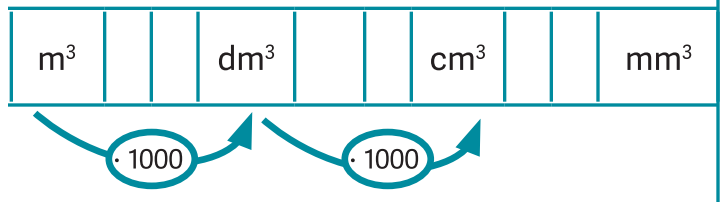
1 litra = 1 dm^3, joten 400 l = 400 dm^3

400 dm^3 : 1 000 = 0,4 m^3



3. Kuinka monta kuutiosenttimetriä 0,5 ”kuutiota” on?

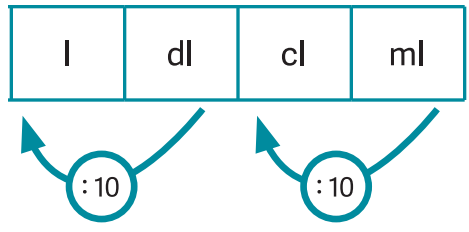
0,5 m^3 · 1 000 = 500 dm^3
5 dm^3 · 1 000 = 500 000 cm^3



4. Kuinka monta kuutiosenttimetriä on 120 cl?

Muutetaan ensin litroiksi:

120 cl : 10 = 12 dl
12 dl : 10 = 1,2 l

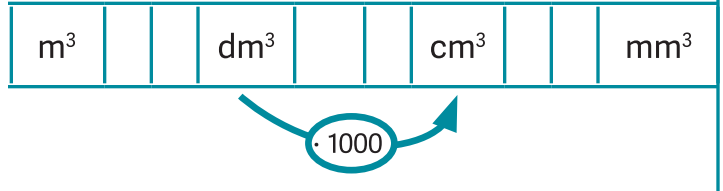


Muutetaan litrat sitten kuutiodesimetreiksi:

1,2 l = 1,2 dm^3

Muutetaan kuutiodesimetrit lopuksi kuutiosenttimetreiksi:

1,2 dm^3 · 1 000 = 1 200 cm^3



Tehtäviä

1. Arvioi seuraavien asioiden tilavuudet:

a) Juomalasi: _____ dl = _____ cm^3

b) 15 metriä pitkä mänty: _____ m^3 = _____ litraa

c) Kottikärry: _____ litraa = _____ m^3

d) Tiili: _____ litraa = _____ dm^3

2. Mikä yksikkö sopii luvun perään? (Ensimmäinen kohta on tehty malliksi.)

a) Perunakattilan koko on noin 2 *litraa* eli 2 ***kuutio****desimetriä*.

b) Mopon moottorin iskutilavuus on noin 0,5 *desilitraa* eli 50 ***kuutio*** _____.

c) 80 kg painavan ihmisen tilavuus on noin 80 *litraa* eli 80 ***kuutio*** _____.

d) Kerrostalokaksion tilavuus on 130 000 *litraa* eli 130 ***kuutio*** _____.

e) Arpakuution tilavuus on 1 *millilitraa* eli 1 ***kuutio*** _____.

f) Ison virvoitusjuomapullon tilavuus on 15 _____ eli 1 500 ***kuutio*** _____.

3. Muunna seuraavat luvut pienempään yksikköön:

1 m^3	dm^3	cm^3
0,1 m^3	dm^3	cm^3
0,01 m^3	dm^3	cm^3
0,001 m^3	dm^3	cm^3
5 m^3	dm^3	cm^3
0,5 m^3	dm^3	cm^3

0,05 m^3	dm^3	cm^3
0,005 m^3	dm^3	cm^3
2,5 m^3	dm^3	cm^3
0,25 m^3	dm^3	cm^3
0,025 m^3	dm^3	cm^3

4. Muunna seuraavat luvut suurempaan yksikköön

1 000 cm^3	dm^3	m^3
100 cm^3	dm^3	m^3
100 000 cm^3	dm^3	m^3
1 cm^3	dm^3	m^3
5 000 000 cm^3	dm^3	m^3
5 000 cm^3	dm^3	m^3
2 500 cm^3	dm^3	m^3
250 000 cm^3	dm^3	m^3
250 cm^3	dm^3	m^3
1 295 cm^3	dm^3	m^3
2 000 000 cm^3	dm^3	m^3

5. Kuinka monta kuutiosenttimetriä mahtuu yhteen kuutiodesimetriin? Perustele vastauksesi.

Yksiköiden yhdistäminen

Monet suureet ilmoitetaan jotain yksikköä kohden olevina arvoina. Esimerkiksi hinta voidaan ilmoittaa yksikössä €/kpl, €/kg, €/litra, €/tunti tai muuna vastaavana merkintänä. Merkintä 3 €/litra tarkoittaa, että yksi litra maksaa 3 euroa.

Esimerkki

Terästangon pituus on 12 metriä, ja se painaa 20 kg. Anna terästangon paino yksikössä kg/m. Selitä sanallisesti, mitä vastaus tarkoittaa.

Ratkaisu: Haluttu yksikkö kg/m saadaan, kun massa jaetaan pituudella:

$$\frac{20\ \text{kg}}{12\ \text{m}} = 1{,}66\ldots\ \frac{\text{kg}}{\text{m}} \approx 1{,}7\ \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Tällöin yksi metri terästankoa painaa noin 1,7 kg.

6. Tomin palkka on 19 €/h. Kirjoita sanallisesti, mitä merkintä tarkoittaa.

7. Kattopaneelimainoksessa on seuraavat merkinnät:

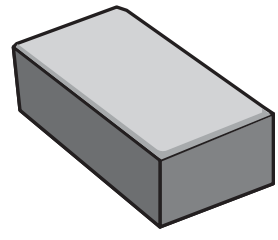
a) riittoisuus 1,51 m^2/pkt

b) hinta 40,50 €/pkt.

Kirjoita sanallisesti, mitä merkinnät tarkoittavat.

8. Pihakivimainoksessa on seuraavat merkinnät:

– Koko 225 x 112,5 x 80 mm
– Paino 4,8 kg/kpl
– Menekki 40 kpl/m^2.



Kirjoita sanallisesti, mitä merkinnät tarkoittavat.

9. Veden tiheys on 1 000 kg/m^3 ja betonin tiheys noin 2 100 kg/m^3. Kirjoita sanallisesti, mitä betonin tiheydellä tarkoitetaan.

10. Ikkunan energiatehokkuutta kuvataan E-arvolla, joka kuvaa ikkunan läpi karkaavan lämpöenergian määrää. Eräässä energiatehokkaassa ikkunassa E-arvo on 45 kWh/m^2/a. Yksikkö kWh (kilowattitunti) on energian yksikkö, ja yksikkölyhenne a on vuosi (annual). Kirjoita sanallisesti, mitä energiatehokkuuslukema tarkoittaa.

11. Eräs sähköyhtiö veloittaa sähköstä 5,5 snt/kWh. Kuinka monta euroa sähköenergia maksaa, jos sähköä kulutetaan 1 000 kWh?

12. Erään maalin riittävyys imeville pinnoille on keskimäärin 8 m^2/litra.

a) Maalipurkissa on yhdeksän litraa maalia. Kuinka monta neliömetriä maalipurkillisella maalaa?

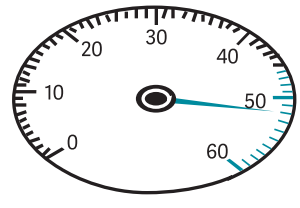
b) Yhdeksän litran maalipurkki maksaa 100 euroa. Kuinka paljon maali maksaa yksikössä €/litra

c) Kuinka paljon maali maksaa yksikössä €/m^2.

13. Auton kulutus ilmoitetaan usein muodossa litraa/100 km. Eräs hybridiauto kulutti 53 litraa bensiiniä 1 450 kilometrin matkalla. Laske auton kulutus yksikössä litraa/100 km.

14. Autojen kojelaudassa on usein moottorin kierroslukumittari. Oheisessa kuvassa kierroslukumittarin yksikkö on 1/min x 100.

a) Mikä on moottorin kierrosnopeus yksikössä 1/min?
(*eli yksikössä rpm*)



b) Mikä on kierrosnopeus yksikössä 1/s?

15. Jos maalle rakennetaan teholtaan keskisuuri 3 MW:n (megawatin) tuulivoimala, rakentaminen maksaa keskimäärin 4,5 miljoonaa euroa. Olkiluoto 3 -ydinvoimalan tehon arvellaan olevan 1 600 MW. Voimalan rakentamiskustannusten taas arvioidaan olevan 8,5 miljardia euroa. Laske sekä 3 MW:n tuulivoimalan että Olkiluoto 3 -ydinvoimalan rakennuskustannukset yksikössä M€/MW (= miljoonaa euroa/megawatti).

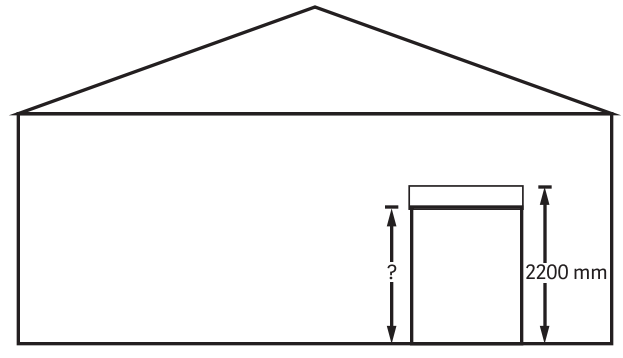
16. Jos betonivaluun ei haluta saumoja, betonimuottia siirretään hiljalleen sitä mukaa kuin betoni kuivuu. Tampereen Näsinneulan rakentamisessa betonimuottia nostettiin 33 vuorokaudessa yhteensä noin 130 metriä.

a) Kuinka suuri muotin nousunopeus oli yksikössä cm/h?

b) Kuinka monta senttimetriä tornin korkeus nousi 8 tunnin aikana, jos nopeus säilyi koko ajan samana?

17. Kun rakennus rakennetaan hirsistä, rakentamisvaiheessa tulee ottaa huomioon hirsien painuminen. Nyrkkisääntönä voidaan pitää sitä, että hirsi painuu alle 10 mm/korkeusmetri. Hirsitaloon tulee liimapuusta valmistettu ovi karmeineen (joka ei painu kasaan). Oviaukon korkeus on 2 230 millimetriä.

Kuinka korkea ovikarmi oviaukkoon voidaan korkeintaan asentaa, jotta hirsi ei painuisi siihen kiinni? (Anna vastaus millimetreinä.)



18. Kuinka monta senttimetriä pitkä on kolmen tuuman naula?

Tuuma, englanniksi inch, on pituusyksikkö, jota käytetään joskus rakentamiseen liittyvissä mitoissa. Tuuma lyhennetään joko kirjainparilla in (esim. 6 in) tai lainausmerkeillä" (esim. 6"). Tuumaa käytetään ainakin seuraavissa asioissa:

1. naulojen pituus, esimerkiksi "neljän tuuman naula"
2. sahatavaran mittojen kutsumanimet, esimerkiksi "kakkosnelonen" = noin 2 tuumaa paksu ja noin 4 tuumaa leveä lankku
3. esimerkiksi "neljän tuuman näyttö" = näyttö, jonka lävistäjä on 4 tuumaa
4. autojen vannekoko, esimerkiksi 15 tuuman vanne
5. housujen vyötärön koko, esimerkiksi housujen vyötärön ympärys 27".

Yksi tuuma on 2,54 senttimetriä.

19. Oheisessa taulukossa on eräitä Suomessa yleisesti myytyjä sahatavaran kokoja. Mitä pituusmittoja seuraavat koot tarkoittavat:

1. "kakkosnelonen"_____ 2. 2" x 2" _____

3. 4" x 4"?_____

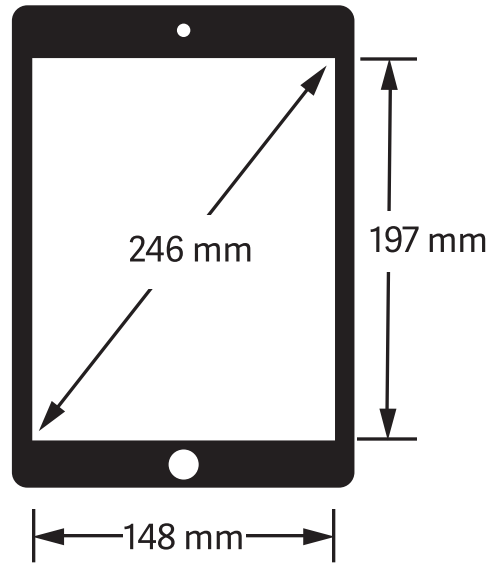
Lähde: http://fi.wikipedia.org/wiki/Sahatavara

Sahatavaran kokoja

Paksuus (mm)	Leveys (mm)							
	50	75	100	125	150	175	200	225
19	·	·	X	X	X	·	·	·
22	X	X	X	X	X	0	·	·
25	X	·	X	X	X	0	·	·
32	·	0	X	X	0	·	·	·
38	·	·	X	X	X	·	·	·
44	·	·	0	0	0	·	·	·
50	X	X	X	X	X	X	X	0
63	·	·	·	·	0	·	0	·
75	·	0	·	·	0	0	X	X
100	·	·	X	·	0	·	0	·
125	·	·	·	X	·	·	·	·
150	·	·	·	·	X	·	·	·

·	= Standardin SFS-EN 1313-1 mukainen havusahatavaran suositeltu koko Suomessa. Standardiin ei sisälly lautojen kokoja.
X	= Yleinen koko (RT 21-10750:n mukaan)
0	= Harvoin varastossa valmiina oleva koko

20. Oheisessa olevassa kuvassa on Mirjamin tablettitietokone. Mainoksessa ilmoitetaan näytön kooksi 9,7". Mirjami teki kauppaan valituksen, koska ei uskonut näytön olevan oikean kokoinen. Osoita Mirjamille, että mainoksessa ollut tieto piti paikkansa.



Ajan yksiköt

Ajan yksiköt eivät noudata suhdelukuja 10, 100 tai 1 000, vaan ajan yksikkömuunnoksissa käytetään tarvittavan muunnoksen mukaan erilaisia suhdelukuja.

Ajan yksiköiden tunnukset ovat seuraavat:

yksikkö	tunnus
vuosi	a
vuorokausi	d, vrk
tunti	h
minuutti	min
sekunti	s

Ajan yksiköiden väliset suhdeluvut ovat seuraavat:

1 a = 365 d

1 d = 24 h

1 h = 60 min

1 min = 60 s

Kun muunnetaan aikaa suuremmasta pienempään, käytetään suhdelukua kertojana.

Esimerkki 1

Muunna

a) 3 h minuuteiksi

b) 45 min sekunneiksi.

Ratkaisu:

a) $3\ \text{h} = 3 \cdot 60\ \text{min} = 180\ \text{min}$

b) $45\ \text{min} = 45 \cdot 60\ \text{s} = 2\,700\ \text{s}$

Kun muunnetaan ajan yksikköä pienemmästä suurempaan, käytetään suhdelukua jakajana.

Esimerkki 2

Muunna

a) 36 h vuorokausiksi

b) 98 min tunneiksi ja minuuteiksi.

Ratkaisu:

a) $36\ \text{h} = 36 : 24 = 1{,}5\ \text{d}$

b) $98\ \text{min} = 98 : 60\ \text{min} \approx 1{,}63\ \text{h}$

Tehtävä b voidaan ratkaista loppuun kahdella tavalla:

Tapa 1

$98\ \text{min} - 60\ \text{min} = 38\ \text{min}$

eli $1{,}63\ \text{h} = 1\ \text{h}\ 38\ \text{min}$

Tapa 2

Ratkaistaan, kuinka paljon on 0,63 h minuutteina, kertomalla tämä luku 60:llä:

$0{,}63 \cdot 60\ \text{min} \approx 38\ \text{min}$

eli $1{,}63\ \text{h} = 1\ \text{h}\ 38\ \text{min}$

Tehtäviä

1. Arvioi, kuinka kauan kestää...

a) junamatka Helsingistä Ouluun: _____ h

b) lentomatka Helsingistä Kööpenhaminaan: _____ h

c) keskimääräinen suomalainen työviikko: _____ h

d) yksi päivä: _____ s

e) pyöräillä 5 km:n työmatka: _____ min

f) pikajuoksijalla juosta 100 metrin matka: _____ s

g) sinulla kävellä koulun ympäri: _____ min

h) sinulla juosta koulun ympäri: _____ min

i) 100 metrin matka autolla, jonka nopeus on 100 km/h: _____ s

2. Tee seuraavat ajan yksikönmuunnokset:

a) 3 a = _____ d b) 2,6 a = _____ d c) 5 d = _____ h

d) 3,8 d = _____ h e) 0,4 d = _____ h f) 2 h = _____ min

g) 6,8 h = _____ min h) 10 min = _____ s i) 70 min = _____ s

3. Tee seuraavat ajan yksikönmuunnokset.

a) 730 d = _____ a b) 73 d = _____ a c) 120 h = _____ d

d) 60 h = _____ d e) 300 min = _____ h f) 45 min = _____ h

g) 100 s = _____ min h) 800 s = _____ min i) 0,6 min = _____ s

4. Tee seuraavat ajan yksikönmuunnokset.

a) 3,8 a = _____ a _____ d b) 5,5 d = _____ d _____ h

c) 400 min = _____ h _____ min d) 75 h = _____ d _____ h

e) 7,8 h = _____ h _____ min f) 1 600 s = _____ min _____ s

5. Martin työpäivä kestää 8,4 h. Kuinka paljon se on tunteina ja minuutteina?

_____

6. Mikko on vuodessa töissä 1 638 h. Kuinka paljon se on vuorokausina?

_____

7. Kuinka monta työtuntia Tiinalle kertyy viikossa, kun hänen työaikansa ovat seuraavat?

ma: 8.15–14.00 ti: 9.00–15.00 ke: 9.30–16.00 to: 8.45–16.30 pe: 7.45–14.15

_____

8. Niilon on oltava töissä klo 7.50. Häneltä kuluu aamutoimiin aikaa yhteensä 38 minuuttia. Lisäksi häneltä kuluu työmatkaan 24 minuuttia. Mihin aikaan Niilon on herättävä?

_____

9. Pinjan työpäivä alkaa klo 7.50 ja kestää 6,8 tuntia. Mihin aikaan hänen työpäivänsä päättyy?

_____

10. Anteron työajat ovat seuraavat:

ma: 6.50–14.30 ti: 5.50–14.00 ke: 7.00–15.00 to: 6.50–13.45 pe: 6.30–15.45

a) Kuinka monta tuntia Antero on viikossa töissä? _____

b) Kuinka paljon Antero saa viikolta palkkaa, kun hänen tuntipalkkansa on 14,00 €? Ota huomioon, että Anterolla on joka päivä 60 minuutin ruokatunti, jolta hän ei saa palkkaa. _____

11. Kuinka paljon matkaan on varattava aikaa, kun keskinopeus on 80 km/h ja matkan pituus on 180 km? Anna vastaus tunteina ja minuutteina.

_____

12. Kuinka monta sekuntia on yhdessä vuodessa?

_____

13. Mikä on yhden laudan höyläykseen kuluva aika, kun

a) 50 lautaa höylätään yhdessä tunnissa _____

b) 100 lautaa höylätään ajassa 2 h 10 min _____

c) 30 lautaa höylätään 25 min 30 sekunnissa? _____

14. Tehtaassa valmistuu yksi tuote ajassa 5 min 35 s. Kuinka monta tuotetta valmistui 7 h:n aikana?

_____

15. Leikkimökin valmistukseen eri työvaiheisiin tarvittava aika on seuraava:

– tarvikkeiden hankinta 2 h
– pohjatyöt 7 h
– seinien pystytys 3 h
– kattotuolien asennus 1 h
– lattian asennus 2 h
– huopakaton valmistaminen 3 h
– maalaus 3 h
– sisustustyöt 2 h.

Leikkimökki on saatava valmiiksi lauantaiksi. Rakentaja tekee töitä 5 tuntia päivässä (ma–pe) klo 8–13. Milloin hänen on aloitettava leikkimökin rakennus?

3

Prosentit

- Prosenttilaskutyypit
- Promille
- Prosenttiyksikkö

Prosentin käsite

Mopon bensiiniin sekoitetaan 2,5 % öljyä. Frisbeegolfkiekot ovat tänään 30 %:n alennuksessa. Pikavipin vuosikorko on 450 %.

Prosentin käsite tulee vastaan jokaisen arki- ja työelämässä jatkuvasti. Jos et tunne prosenttia ja sen laskemista, elämäsi hankaloituu tarpeettomasti.

Prosenttia käytetään kuvamaan asioiden suhteellista osuutta jostain kokonaisuudesta. Seuraavan infotaulun voisit melkeinpä monistaa seinällesi!

Yksi prosentti vastaa yhtä sadasosaa:

1 % = 1/100 = 0,01

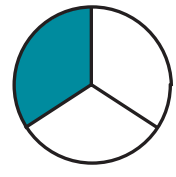
Koska prosentti on suhdeluku, sillä ei ole lainkaan yksikköä.

Jotta opit laskemaan prosenttilaskuja, sinun täytyy aluksi oppia muuttamaan prosenttiluvut desimaaliluvuiksi ja päinvastoin.

Esimerkki

Esimerkki

Luku 0,333... voidaan ilmaista seuraavilla tavoilla:

desimaaliesitys	prosenttiesitys	murtolukuesitys	graafinen esitys
0,333...	33,3...%	$\frac{1}{3}$	

Prosenttilukua desimaaliluvuksi muutettaessa pilkku siirtyy kaksi pykälää vasemmalle (jaa sadalla). Desimaalilukua prosenttiluvuksi muutettaessa pilkku siirtyy kaksi pykälää oikealle (kerro sadalla).

Tehtäviä

1. Muunna prosenttiluvut desimaaliluvuiksi.

a) 15 % _____ b) 10 % _____ c) 25 % _____

d) 66 % _____ e) 74 % _____ f) 103 % _____

g) 153 % _____ h) 200 % _____ i) 0,9 % _____

2. Muunna desimaaliluvut prosenteiksi.

a) 0,53 _____ b) 0,08 _____ c) 0,0861 _____

d) 0,366 _____ e) 0,008 _____ f) 5,6 _____

g) 0,033 _____ h) 1,30 _____ i) 100 _____

3. Lavenna tai supista murtoluku siten, että nimittäjäksi tulee 100. Ilmoita murtoluku sitten prosentteina. Ensimmäinen kohta on tehty malliksi.

a) $\overset{4)}{\frac{2}{25}} = \frac{8}{100} = 8\ \%$

b) $\frac{2}{5} =$

c) $\frac{0{,}3}{20} =$

d) $\frac{104}{200} =$

e) $\frac{4}{80} =$

f) $\frac{9}{45} \overset{(9}{} =$

Joskus luku, etenkin murtoluku, on helpointa muuttaa prosenteiksi laventamalla tai supistamalla sitä niin, että nimittäjäksi tulee 100. Tässä tehtävässä on muutama esimerkki näistä murtoluvuista.

4. Muunna luvut prosenteiksi.

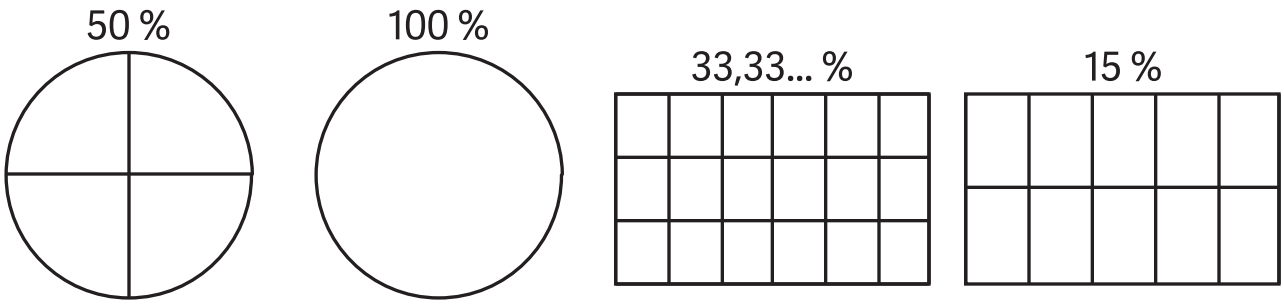
a) $2\frac{1}{10} =$ _____ b) $\frac{1}{2} =$ _____ c) $\frac{7}{20} =$ _____

d) 0,05 = _____ e) 1,04 = _____ f) 0,78 = _____

g) kolmekymmentäkaksi sadasosaa _____

h) kolmannes (yksi kolmasosa) _____ i) yksi tuhannesosa _____

5. Väritä kuviosta kuvion päällä olevan prosenttiluvun kokoinen alue.



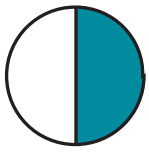
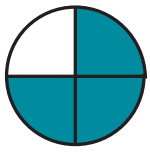
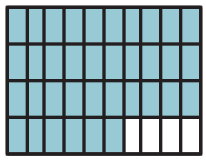
6. Muunna murtoluvut prosenteiksi.

a) $\frac{100}{150}$ = _____ b) $\frac{2}{7}$ ≈ _____

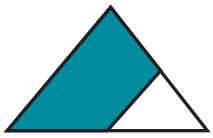
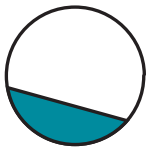
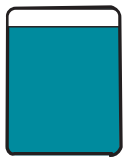
c) $\frac{2}{11}$ ≈ _____ d) $4\frac{1}{9}$ ≈ _____

Jos murtoluvun nimittäjää ei saada helposti muutetuksi sadaksi, murtoluku kannattaa muuttaa ensin desimaaliluvuksi jakamalla osoittaja nimittäjällä.
Desimaaliluku saadaan prosenttiluvuksi kertomalla se sadalla.

7. Ilmoita murtolukuna, desimaalilukuna ja prosentteina, kuinka suuri osa kuviosta on tummennettu? Yritä käyttää mahdollisimman vähän laskinta.

	a) 	b) 	c)	d)	e) 
murto-luku:					
desimaali-luku:					
prosentti-luku:					

8. Arvioi viiden prosentin tarkkuudella, kuinka suuri osa kuviosta on väritetty.

a) 	b)	c) 	d) 

9. Kuinka paljon on yksi kymmenesosa viidestäsadasta eurosta? _____

10. Kuinka paljon on kolme kymmenesosaa kahdestasadasta eurosta? _____

11. Kuinka paljon on yksi sadasosa seitsemästäsadasta eurosta? _____

12. Kuinka paljon on kuusi sadasosaa kahdestasadasta eurosta?
(*Laske ensin yksi sadasosa ja kerro se sitten kuudella.*) _____

13. Laita alla olevien lukujen väliin jokin seuraavista merkinnöistä: <, > tai =

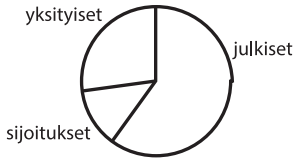
7 : 100	7 %	seitsemän sadasosaa	0,07

14. Kuinka paljon on 7 % kahdestasadasta eurosta? _____

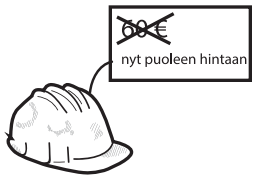
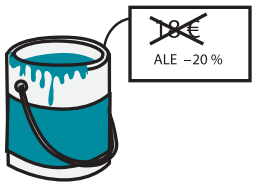
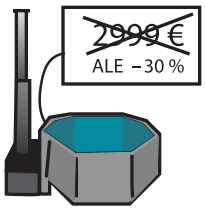
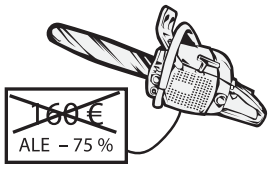
15. Kuinka paljon on 8 % viidestäkymmenestä eurosta? _____

16. Kuinka paljon on 75 % kahdestasadastaviidestäkymmenestä eurosta? _____

17. Erään rakennusalan yhtiön tuloista 65 % saatiin julkisten rakennusten ja hankkeiden tekemisestä. Yksityisiltä rakennuttajilta saatiin 28 %. Loput saatiin sijoitustoiminnasta. Kuinka monta prosenttia tuloksesta tuli sijoitustoiminnasta?



18. Kuviin on merkitty tuotteen alkuperäinen hinta. Laske ilman laskinta, millä hinnalla tuote myydään alennuksen jälkeen.

			
a)	b)	c)	d)

19. Arvioi, millä välillä vastaus on. Anna kymmenen prosenttiyksikön pituinen väli.

a) Kuinka monta prosenttia 45 euroa on 200 eurosta?

b) Kuinka monta prosenttia 42 euroa on 150 eurosta?

c) Kuinka monta prosenttia 720 000 ihmistä on viidestä miljoonasta?

d) Kuinka monta prosenttia 180 euroa on 140 eurosta?

Arviointi on tärkeä taito elämässä. Arvioinnin avulla pystyt myös ehkäisemään laskuvirheitä.

Kun jaat perusarvon luvulla 10, saat 10 prosenttia. Muut tasakymmenet saat kertomalla edellistä tulosta kokonaisluvuilla.

Esimerkiksi 10 prosenttia 200 €:sta on 200 € : 10 = 20 €. Tällöin 20 % on 40 € ja 30 % = 60 €.

Prosenttilaskutyypit

Prosenttilaskujen laskemista pidetään yleisesti hieman hankalana. Asia helpottuu, jos ajattelee, että prosenttilaskuja on kolmea eri tyyppiä: 1. prosenttiarvon määritys, 2. prosenttiluvun määritys ja 3. perusarvon määritys. Seuraavissa luvuissa käsitellään järjestyksessä nämä kolme erilaista prosenttilaskutyyppiä.

Tyyppi 1: Prosenttiarvon määritys

Kun tiedät perusarvon ja haluat laskea siitä tietyn prosenttiosuuden, olet laskemassa prosenttiarvoa.

Lähestytään asiaa esimerkin kautta.

Esimerkki 1

Laske 24 %:n osuus 600 eurosta.

Tapa 1
Muutetaan prosentit desimaaliluvuiksi ja kerrotaan sillä perusarvo:

$0{,}24 \cdot 600\ € = 144\ €$

Tapa 2
Jaetaan perusarvo sadalla ja selvitetään yhtä prosenttia vastaava osuus.
Tämän jälkeen kerrotaan tulos 24:llä:

$$\frac{600\ €}{100} \cdot 24 = 144\ €.$$

Huomasithan, että tämä on matemaattisesti aivan sama laskutapa kuin ensimmäinenkin!

Esimerkki 2

Sait palkkaa 2 800 euroa. Joudut maksamaan palkastasi ennakonpidätystä 30 %.
Laske ennakonpidätyksen määrä.

Kyseessä on juuri samankaltainen tehtävä kuin edellisessä esimerkissä. Nyt tehtävänanto on vain verhottu käytännön elämään. Tehtävän ydin on siis ”Laske 30 %:n osuus 2 800 eurosta”. Tehdään kuten aikaisemminkin:

$0{,}30 \cdot 2\,800\ € = 840\ €.$

Ennakonpidätystä on siis maksettava 840 euroa.

Esimerkki 3

Rautakaupassa kaikki naulauspistoolit ovat 40 %:n alennuksessa. Runkonaulaimen lähtöhinta on 179 euroa. Mikä tuotteen hinnaksi jää?

Tapa 1
Lasketaan ensin alennus:

$0{,}4 \cdot 179\ € = 71{,}6\ €$.

Vähennetään alennus alkuperäisestä hinnasta, jolloin saadaan alennettu hinta:

$179\ € - 71{,}6\ € = 107{,}4\ €$.

Vastaus: Naulain maksaa alennuksen jälkeen 107,4 euroa.

Tapa 2
Lasketaan aluksi, kuinka monta prosenttia hinnasta jää maksettavaksi alennuksen jälkeen:

$100\ \% - 40\ \% = 60\ \%$.

Toisin sanoen tuotteen alkuperäisestä hinnasta on jäljellä 60 % ja loppuhinnaksi saadaan

$0{,}60 \cdot 179\ € = 107{,}4\ €$.

Vastaus: Naulain maksaa alennuksen jälkeen 107,4 euroa.

Tehtäviä

1. Arvioi ensin, kuinka paljon on 50 % seuraavista luvuista, ja tarkista tulos sen jälkeen laskemalla. Ilmoita tulos kokonaislukuna.

Luku	Arvio	Laskun tulos
100		
50		
120		
500		

2. Arvioi ensin, kuinka paljon on 20 % seuraavista luvuista, ja tarkista tulos sen jälkeen laskemalla. Ilmoita tulos kokonaislukuna.

Luku	Arvio	Laskun tulos
10		
20		
150		
400		

3. Arvioi ensin, kuinka paljon on 33 % seuraavista luvuista, ja tarkista tulos sen jälkeen laskemalla. Ilmoita tulos kokonaislukuna.

Luku	Arvio	Laskun tulos
100		
300		
45		
75		

4. Arvioi ensin, kuinka paljon on 75 % seuraavista luvuista, ja tarkista tulos sen jälkeen laskemalla. Ilmoita tulos kokonaislukuna.

Luku	Arvio	Laskun tulos
1 000		
400		
75		
24		

5. Laske

a) 40 %:n osuus 300 eurosta

b) 16 %:n osuus 560 kilogrammasta

c) 6 %:n osuus 9000:sta

d) 0,5 %:n osuus 50 eurosta

e) 160 %:n osuus 45:stä

f) 15 %:n osuus 54 000 kilometristä.

6. Laske

a) 4,52 %:n osuus 35 eurosta

b) 1,6 %:n osuus 50 grammasta

c) 0,35 %:n osuus 5 900:sta

d) 160,4 %:n osuus 150:sta.

e) 43 %:n osuus 45:stä

f) 15,65 %:n osuus 45 650 millimetristä.

7. Rautakaupan loppuunmyynnissä kaikki hinnat alenivat 30 %. Laske tuotteista saadut alennukset ja uudet hinnat.

a) Vasara, hinta 39 euroa	b) Moottorisaha, jossa on 16 tuuman laippa, hinta 499 euroa	c) Liukujiirisaha 2 200 W, hinta 699 euroa
Alennus:	Alennus:	Alennus:
Lopullinen hinta:	Lopullinen hinta:	Lopullinen hinta:

8. Korota seuraavia hintoja 15 % *ilman laskinta*.

a) 100 euroa _____ b) 200 euroa _____ c) 60 euroa _____

d) 1 000 euroa _____ e) 500 euroa _____ f) 150 euroa. _____

9. Vähennä seuraavista massoista 40 % *ilman laskinta.*

a) 10 tonnia _____ b) 15 tonnia _____ c) 60 kg _____

d) 90 g _____ e) 1 000 000 kg _____ f) 800 kg _____

10. Yrittäjä osti materiaalia toimittajaltaan tukkuhintaan ja maksoi siitä 14,28 €. Materiaalin hinta henkilöasiakkaalle olisi ollut 23,04 €. Kuinka paljon hän sai tukkualennusta prosentteina?

_____

11. Ikkunoiden valoaukon pinta-alan (lasin pinta-ala) tulee olla vähintään 10 % asuinhuoneen lattiapinta-alasta. Kuinka suuri tulee ruudun koko vähintään olla, jos huoneen pinta-ala on

a) 10 m^2 _____ b) 12 m^2 _____ c) 30 m^2? _____

12. Aggregaattiin (kaksitahtinen) tarvittiin 5 l polttoainetta. Kuinka paljon bensiinin sekaan pitää laittaa öljyä, jotta saadaan 2-prosenttinen seos?

_____

13 Erään lakan ohennussuositus on 20 %. Kuinka paljon ohennetta tarvitaan, jos lakan menekki on 5 l?

_____

14. Lämmöneristysvaatimukset määrittelevät ikkunapinta-alan (karmeineen) seuraavasti: ikkunoiden yhteenlasketun pinta-alan osuuden pitää olla vähintään 15 % rakennuksen kerrosalasta.

Vastaavasti ikkunapinta-alan osuus rakennuksen ulkoseinien yhteenlasketusta pinta-alasta saa olla enintään 50 %.

Laske seuraavien rakennusten vähimmäis- ja enimmäisikkunapinta-alat:

a) pinta-ala 100 m², ulkoseinien pinta-ala 140 m²

b) pinta-ala 250 m², ulkoseinien pinta-ala 360 m².

15. Erästä pesuainetta voidaan käyttää joko peruspuhdistukseen tai tehopuhdistukseen, jolloin pinta on valmis käsiteltäväksi muulla aineella. Kun ainetta käytetään peruspuhdistukseen, siitä tehdään sekoitus, jossa on 30 ml ainetta ja 1 l vettä. Jos taas sitä käytetään tehopuhdistukseen, sekoitussuhde on 50 ml ainetta ja 1 l vettä. Mikä on valmiin seoksen pitoisuus prosentin kymmenyksen tarkkuudella

a) peruspuhdistuksessa

b) tehopuhdistuksessa?

16. Ostat rahasto-osuuksia 2 000 €:lla. Tuottoa saat seuraavasti:

1. vuonna 4,5 %
2. vuonna 7,3 %
3. vuonna –2,8 %
4. vuonna 1,2 %
5. vuonna 12,8 %

a) Kuinka paljon saat voittoa kun myyt osuutesi 5. vuoden lopussa? Ostaessasi ja myydessäsi pankki veloittaa 1,2 %.

b) Mikä on tuottoprosenttisi?

17. Aikatyöpalkalla työskentelevä työntekijä (A) ansaitsee eräänä vuonna 40 250 € (bruttopalkka) ja urakkapalkalla työskentelevä työntekijä (B) 54 522 € (bruttopalkka). Molemmilla työntekijöillä on sama kunnallisveroaste, 21,5 %. Lisäksi veron määrään tulee lisätä 5,7 % eläkevakuutusmaksua ja 0,65 % työttömyysvakuutusmaksua.

Kuinka paljon työntekijät maksavat palkoistaan veroa euromääräisesti, jos ei oteta huomioon henkilökohtaisia muita tuloja ja vähennyksiä?

Verotettava ansiotulo, euroa	Vero alarajan kohdalla, euroa	Vero alarajan ylittävästä tulon osasta, %
16 500–24 700	8	6,5
24 700–40 300	541	17,5
40 300–71 400	3 271	21,5
71 400–90 000	9 957,50	29,75
90 000–	15 491	31,75

a) Työntekijä A: palkkatulo 40 250 €

b) Työntekijä B: palkkatulo 54 522 €

c) Kuinka paljon työntekijöille jää käteen (nettopalkka) keskimäärin kuukaudessa?

Tyyppi 2: Prosenttiluvun määritys

Kun haluat laskea jonkin määrän prosenttiosuuden perusarvosta, olet laskemassa prosenttilukua. Tässä tyypissä laskun vastaus on siis aina prosentteja. Prosenttiluku saadaan selville jakolaskun avulla. Muista sijoittaa aina perusarvo jakoviivan alapuolelle.

Esimerkki 1

Kuinka monta prosenttia luku 35 on luvusta 400?

Jaetaan luvut keskenään:

$$\frac{35}{400} = 0{,}0875 = 8{,}75\ \% \approx 8{,}8\ \%.$$

Laskin antaa vastauksen paljaana desimaalilukuna (0,0875), mutta voit helposti muuttaa vastauksen prosenteiksi kertomalla vastauksen sadalla päässäsi.

Vastaus: 8,8 %

Esimerkki 2

Työpaikalla on yhteensä 80 työntekijää. Heistä 52 on naisia. Kuinka monta prosenttia työpaikan työntekijöistä on naisia?

Tehtävä on samanlainen kuin ensimmäinenkin. Tehtävän ydinkysymys on "Kuinka monta prosenttia luku 52 on luvusta 80?" Ratkaistaan tehtävä kuten aikaisemminkin:

$$\frac{52}{80} = 0{,}65 = 65\ \%$$

Vastaus: Naisia on 65 %.

Muutosprosentit ovat myös tyyppiä 2. Periaate on sama kuin kahdessa aikaisemmassa esimerkissä. Jakoviivan päälle tulee muutoksen määrä. Vastaavasti jakoviivan alle jakajaksi tulee aina perusarvo eli arvo, johon muutosta vertaat. Katso mallia seuraavista esimerkeistä.

Esimerkki 3

Vanttera keski-ikäinen mies päätti laihduttaa. Hän painoi aluksi 90 kg, mutta onnistuneen laihdutuksen jälkeen hän painoi enää 70 kg. Kuinka monta prosenttia mies pudotti painoansa?

Kuten mainittua, jaetaan *painon muutos* alkuperäisellä painolla:

$$\frac{\text{Painon muutos}}{\text{Alkuperäinen paino}} = \frac{90\ \text{kg} - 70\ \text{kg}}{90\ \text{kg}} = \frac{20\ \text{kg}}{90\ \text{kg}} = 0{,}222\ldots \approx 22\ \%.$$

Vastaus: Mies pudotti painoaan noin 22 %.

Esimerkki 4

Keski-ikäinen mies painoi aluksi 70 kg mutta lihoi hiljalleen siten, että hänen painonsa oli lopulta 90 kg. Kuinka monta prosenttia mies lihoi?

Jaetaan jälleen painon muutos alkuperäisellä painolla:

$$\frac{\text{Painon muutos}}{\text{Alkuperäinen paino}} = \frac{90\ \text{kg} - 70\ \text{kg}}{70\ \text{kg}} = \frac{20\ \text{kg}}{70\ \text{kg}} = 0{,}2857\ldots \approx 29\ \%.$$

Vastaus: Mies lihoi noin 29 %.

Huomaa, että esimerkeissä 3 ja 4 painot ovat samat (70 kg ja 90 kg) mutta vastaukset ovat erilaisia. Laskijan täytyy pitää aina mielessä, mihin arvoon muutosta ollaan kulloinkin vertaamassa.

Tehtäviä

1. Arvioi, kuinka monta prosenttia annettu luku on luvusta 1 000. Tarkista tulos sen jälkeen laskemalla. Ilmoita tulos kokonaislukuna.

Luku	Arvio	Laskun tulos
100		
880		
370		
20		

2. Arvioi, kuinka monta prosenttia annettu luku on luvusta 2 400. Tarkista tulos sen jälkeen laskemalla.

Luku	Arvio	Laskun tulos
240		
720		
500		
600		

3. Kuinka monta prosenttia on

a) 50 euroa 300 eurosta _____

b) 16 kg 560 kg:sta _____

c) 65 naulaa 160 naulasta _____

d) 4,5 cm 50 cm:stä _____

e) 80 mm 45 cm:stä _____

f) 16 euroa 5 400 eurosta? _____

4. Laske seuraava tehtävä ilman laskinta. Kuinka monta prosenttia on

a) 50 euroa 150 eurosta _____ b) 5 kg 50 kg:sta _____

c) 1,4 euroa 1400 eurosta _____ d) 1,5 cm 6 cm:stä _____

e) 12,5 mm 10 cm:stä _____ f) 40 euroa 200 eurosta? _____

5. Nelosdivisioonan jääkiekkojoukkueessa oli maalivahti, joka torjui 47 laukauksesta vain 16 laukausta. Mikä oli hänen torjuntaprosenttinsa?

_____

6. Kylpyhuoneremontin kokonaishinnaksi tuli 12 000 euroa. Tästä työn osuus oli 5 000 euroa. Loput rahoista kuluivat rakennustarvikkeisiin. Kuinka monta prosenttia budjetista kului

a) työhön _____ b) rakennustarvikkeisiin? _____

7. Koulussa riehui ärhäkkä flunssavirus. Eräästä 18 opiskelijan ryhmästä oli poissa 8 opiskelijaa. Kuinka monta prosenttia opiskelijoista oli paikalla? _____

8. Osakesalkun koko oli 25 000 euroa. Siitä 12 000 euroa oli sijoitettu rakennusalan yrityksiin, 10 000 euroa it-firmoihin ja loput terveysalan kasvuyrityksiin. Kuinka monta prosenttia oli sijoitettu

a) rakennusalan yrityksiin _____

b) it-firmoihin _____

c) terveysalan kasvuyrityksiin? _____

9. Laske, kuinka monta prosenttia

a) isompi 100 euroa on kuin 50 euroa

b) pienempi 50 euroa on kuin 100 euroa.

$$\text{muutosprosentti} = \frac{\text{muutos}}{\text{arvo, johon vertaat}} \cdot 100\ \%$$

10. Palkkasi nousi 1 500 eurosta 2 000 euroon. Kuinka suuri palkankorotuksesi oli prosentteina?

11. Talotekniikka-alan keskimääräinen aikatyöpalkka oli 16,75 €/h ja urakkatyöpalkka 20,97 €/h. Kuinka monta prosenttia enemmän urakkatyötä tekevä ansaitsee tunnilta?

Tyyppi 3: Perusarvon määritys

Toisinaan tulee eteen tilanne, jossa tiedetään tietyn määrän osuus prosentteina jostain perusarvosta. Perusarvon määritykseen on käytännössä kaksi tapaa.

Esimerkki

Mistä rahasummasta 15 euroa on 6 %?

Tapa 1
Muutetaan prosentti desimaaliluvuksi ja jaetaan sillä tehtävässä annettu rahamäärä.

Tapa 2
Jaetaan tehtävässä annettu rahamäärä kuudella, jolloin saadaan yhtä prosenttia vastaava rahamäärä. Kerrotaan tulos lopuksi sadalla, jolloin saadaan perusarvo:

$$\frac{15\ €}{6\ \%} \cdot 100\ \% = 250\ €.$$

Matemaattisesti ajatellen kumpikin tapa on kuitenkin tismalleen samanlainen.

Tehtäviä

1. Päättele ilman laskinta, mistä määrästä

a) 2 € on 50 % _____ b) 16 € on 10 % _____ c) 4 cm on 200 % _____

d) 65 kg on 65 % _____ e) 2 snt on 1 % _____ f) 15 kg on 20 %. _____

2. Mistä määrästä

a) 14 kg on 30 % _____ b) 16 kg on 12 % _____ c) 4 kg on 2,5 % _____

d) 0,65 kg on 65 %_____ e) 8 kg on 1,2 % _____ f) 64 kg on 18 %? _____

3. Olet maksanut palkastasi veroja ja sivukuluja 430 euroa, joka oli 27 % koko palkasta. Mikä oli bruttopalkkasi?

_____

4. Remonttiurakkaa oli tehty 5 päivää. Vastaava työnjohtaja sanoi, että luultavasti työstä on tehty jo 25 %. Kuinka montaa päivä remontti siis kestäisi yhteensä?

_____

5. Rane oli saanut jo osan kesätyöpalkastaan. Hän oli saanut 500 euroa, joka vastasi 43 %:a koko palkasta. Mikä oli hänen kokonaispalkkansa?

_____

6. Automaattisen pistepuikon hintaa oli laskettu 4 euroa, joka vastasi 15 %:a kokonaishinnasta. Mikä oli tuotteen alkuperäinen hinta?

_____

7. Polttoainesäiliö oli 46-prosenttisesti täynnä. Polttoainetta oli 50 litraa. Kuinka suuri säiliön tilavuus on?

_____

8. Arvonlisäverokannat vaihtelevat eri hyödykeryhmittäin.

yleinen verokanta: useimmat tavarat ja palvelut	**24 %**
alennettu verokanta: elintarvikkeet, rehu, ravintola- ja ateriapalvelut	**14 %**
alennettu verokanta: kirjat, lääkkeet, liikuntapalvelut, elokuvanäytökset, kulttuuri- ja viihdetilaisuuksien sisäänpääsy, henkilökuljetus, majoituspalvelut ja televisio- ja yleisradiotoiminnasta saadut korvaukset	**10 %**

Kuinka paljon seuraavat summat sisältävät arvonlisäveroa, kun ostokset sisältävät rakennustarvikkeita? *Vinkki: Arvonlisävero lasketaan aina verottomasta hinnasta.*

Ostosten verollinen loppusumma	Arvio	Laskun tulos
389,00 €		
550,00 €		
25,00 €		
1 058,25 €		

Promille

Yksi promille tarkoittaa yhtä tuhannesosaa, eli

1 ‰ = 0,001

Huomaa, että jokainen prosenttilaskentaan kuuluva sääntö pätee myös promilleja laskettaessa.

Esimerkki

Hopealautasen massa oli 280,0 g. Kemiallisessa määrityksessä todettiin, että lautasen massasta oli puhdasta hopeaa 232,4 grammaa. Mikä oli lautasen hopeapitoisuus promilleina?

Tehtävässä kysytään promillelukua, eli sovelletaan prosenttilaskutyyppiä 2: $\frac{232{,}4\ \text{g}}{280\ \text{g}} = 0{,}83 = 830\ ‰$

Nyt laskimen antama desimaaliluku muutetaan promilleiksi kertomalla se tuhannella.

Vastaus: Lautasen hopeapitoisuus oli 830 promillea.

Lisätietoa: Kultaisissa ja hopeisissa arvoesineissä arvometallin pitoisuus promilleina on stanssattu esineeseen. Löydätkö koruistasi leiman? Jos et, omistat todennäköisesti rihkamaa.

Prosenttiyksikkö

Prosenttiyksikköä käytetään vertailtaessa eri prosenttiosuuksia. Prosenttiyksikkö saadaan prosenttilukujen erotuksena.

Esimerkki

Puolueen kannatus oli edellisessä vaaleissa 14 %. Uusissa vaaleissa kannatus oli kasvanut 25 %:iin.

a) Kuinka monta prosenttiyksikköä kannatus kasvoi?
Kannatuksen kasvu prosenttiyksikköinä saadaan prosenttien erotuksesta:

$25\ \% - 14\ \% = 11\ \%$

Vastaus: Kannatus kasvoi 11 prosenttiyksikköä.

b) Kuinka monta prosenttia kannatus kasvoi?

Kysymys on muutosprosentista: $\frac{\text{Kannatuksen muutos}}{\text{Alkuperäinen kannatus}} = \frac{25\ \% - 14\ \%}{14\ \%}$

$$= \frac{11\ \%}{14\ \%} = 0{,}7857\ldots \approx 79\ \%$$

Vastaus: Kannatus kasvoi 79 prosenttia.

Tehtäviä

1. Täydennä taulukko päättelemällä ilman laskinta.

	1 %	10 %	20 %	25 %	50 %
200 €:sta					
50 €:sta					
3 000 €:sta					
4 €:sta					
15 €:sta					

2. Laske ilman laskinta, kuinka paljon on 1 promille

a) 3 000 kg:sta _____ b) 20 mg:sta _____

c) 12 €:sta _____ d) 800 litrasta. _____

3. Laske ilman laskinta, kuinka paljon on

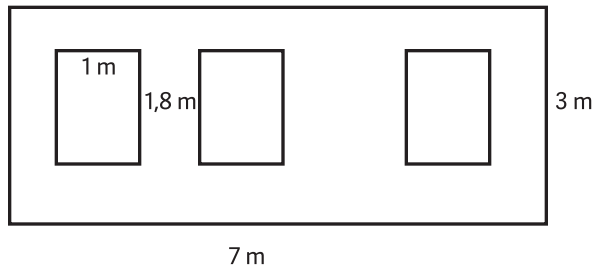
a) 300 promillea 2 000:sta _____ b) 10 ‰ 40:stä _____

c) 15 ‰ 490:stä _____ d) 6 ‰ 300:sta. _____

4. Kuinka monta prosenttiyksikköä on muutos

a) 15 %:sta 30 %:iin _____ b) 50 %:sta 70 %:iin? _____

5. Kuinka monta prosenttia seinän pinta-alasta on ikkunaa?



6. Vanhaan moottorikelkkaan suositellaan laittamaan bensiiniseosta, jossa on 3 % öljyä. Kuinka paljon 27 litran tankkiin laitetaan öljyä, jos tankki tankataan täyteen?

7. Puutavara painoi ennen kuvausta 2 500 kg ja kuivauksen jälkeen 2 176 kg. Kuinka monta prosenttia puutavaran painosta oli vettä?

8. Seinän sivun pituuden pitäisi piirustusten mukaan olla 25 900 mm. Todellisuudessa mitta oli 25,75 m. Kuinka monen promillen virheestä oli kyse?

9. Mikon palkka nousi ensin 3 % ja puolen vuoden jälkeen vielä 2 %. Tanelin palkkaa korotettiin kerralla 5 %. Kumman palkka oli korotuksien jälkeen suurempi? Molempien kuukausipalkka ennen korotusta oli 1 800 €.

10. Rakennusalalla palkat kasvoivat vuonna 2013 kaikkiaan 1,9 %. Ramin kuukausipalkka ennen korotusta oli 2 120 €. Mikä hänen palkkansa oli korotuksen jälkeen?

11. Omarahoitusosuus asuntolainaa varten on 15 %. Minkä hintaiseen asuntoon riittävät 30 000 €:n säästöt?

12. Auton omistajalla on 35 %:n bonus vakuutusyhtiössä. Hän saa vakuutuksesta 35 %:n alennuksen. Bonus huomioon otettuna vakuutuksen hinta on 678 € vuodessa. Mikä olisi vakuutuksen suuruus ilman bonusta?

13. Kun maa-ainesta siirretään kasasta kuljetusauton lavalle, sen tilavuus kasvaa, kun maa-aineksen väliin pääsee ilmaa. Hiekkakasan tilavuus ennen lastausta oli 300 m^3 ja lastauksen jälkeen mitattu tilavuus oli 390 m^3. Kuinka monta prosenttia hiekkakasan tilavuus kasvoi?

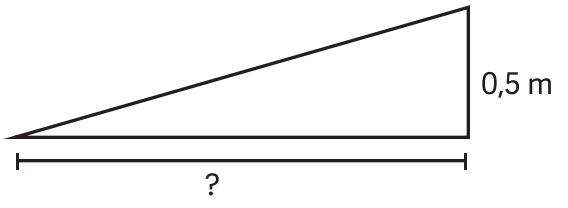
14. Erään kunnan työttömyys oli heinäkuussa 14 % ja syyskuussa 1,2 prosenttiyksikköä pienempi. Kunnan väkiluku oli heinäkuussa 12 435 ja syyskuussa 12 387.

a) MIkä oli kunnan työttömyysprosentti syyskuussa?

b) Kuinka paljon kunnassa oli työttömiä syyskuussa?

15. Naulaimen verollinen hinta on 49 €. Laske veroton hinta. Arvonlisävero on 24 %.

16. Luiskan kaltevuus saa olla enintään 8 % (eli korkeus saa olla korkeintaan 8 % leveydestä). Laske, kuinka kauaksi korokkeesta luiskan pään on vähintään tultava, kun luiskan on yllettävä 0,5 metrin korkeuteen.



17. Mauri tarvitsee tiiliseinän puhdistamiseen laastista 5-prosenttista suolahappoliuosta. Hänellä on 0,5 litraa suolahappoliuosta, jonka pitoisuus on 25 %. Kuinka paljon siihen on lisättävä vettä, jotta pitoisuus on sopiva?

18. Dieselmoottorin hyötysuhde on 40 % ja bensiinimoottorin 25 %. Kuinka monta prosenttia parempi dieselmoottorin hyötysuhde on bensiinimoottoriin verrattuna?

19. Metallivalu kutistuu 1,5 % jähmettyessään sulasta kiinteäksi. Kiinteänä valurautakappaleen tulisi olla 250 mm:n pituinen. Kuinka pitkä valumuotin on oltava?

20. Omakotitalon tekemiseen varattu budjetti oli 195 000 €. Lopulliseksi budjetiksi tuli kuitenkin 215 800 €. Kuinka monta prosenttia budjetti ylittyi?

21. Netan kuukausipalkka on 1 890 €. Palkasta menee veroihin 20 %, TyEl-maksuun 5,7 % ja työttömyysvakuutusmaksuun 0,67 %. Kuinka monta euroa Netalle jää palkasta maksujen jälkeen käteen?

22. Sähköyhtiön laski sähkön hintaa 15 %. Tämä lisäsi sähkön myyntiä 16,5 %. Kasvoiko sähköyhtiön voitto?

23. 👣👣👣 Lounasravintolasta saa bonuskortilla jokaisesta lounaasta 5 %:n alennuksen. Lounaan hinta ilman alennusta on 10 €. Joka kahdeksas lounas on ilmainen. Kuinka monta prosenttia kanta-asiakas säästää, jos hän syö lounasravintolassa 10 kertaa?

24. 👣👣👣 Kuinka monta prosenttia (ja mihin suuntaan) tuotteen hinta muuttui, kun se nousi ensin 5 % ja laski sitten 6 %?

25. 👣👣👣 Kuinka paljon vettä on lisättävä 3 litraan 30-prosenttista suolahappoliuosta, jotta saadaan 15-prosenttista liuosta?

4

Geometria ja mittakaava

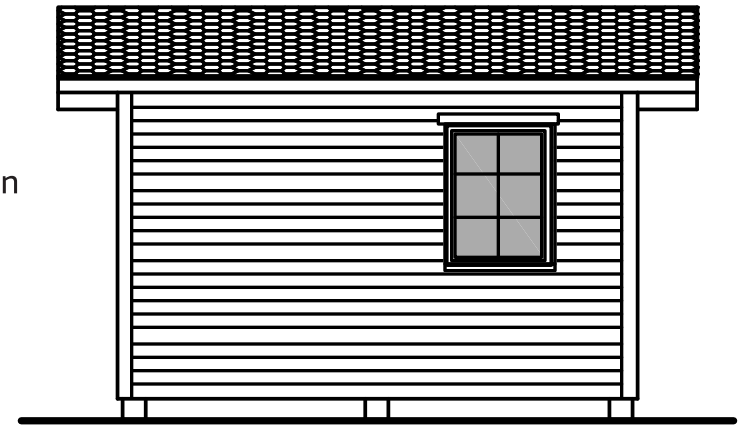
- Mittakaava
- Pinta-alat ja tilavuudet
- Pythagoraan lause
- Trigonometria

Mittakaava

Mittakaavaa käytetään, kun halutaan kuvata sellaista kohdetta, joka on liian suuri tai pieni todellisessa koossa piirrettäväksi. Mittakaava on piirustuksessa olevan mitan ja todellisen mitan välinen suhde. Mittakaavaa käytetään muun muassa kartoissa ja rakennuspiirustuksissa. Esimerkiksi mittakaava 1 : 100 tarkoittaa, että 1 cm piirustuksessa vastaa 100 cm:ä luonnossa eli luonnollinen koko on 100 kertaa suurempi.

Esimerkki 1

Ohessa olevan piirustuksen mittakaava on 1 : 50. Mikä on leikkimökin korkeus luonnossa?



Paperilla leikkimökin korkeus on 4,5 cm. Koska mittakaava on 1 : 50, on leikkimökin korkeus luonnossa 50-kertainen:

$4{,}5 \cdot 50 = 225$ cm.

Leikkimökki on siis todellisuudessa 2,25 m korkea.

Esimerkki 2

Mikä on piirustuksen mittakaava, kun talon harjan korkeus todellisuudessa on 2 metriä ja piirustuksessa se on 5 cm?

Kun lasketaan todellisen ja piirustuksessa olevan mitan välistä suhdetta, yksiköiden on oltava samat!

Todellisen mitan ja piirustuksessa olevan mitan suhde tässä tapauksessa on $\frac{200\ \text{cm}}{5\ \text{cm}} = 40$.

Mittakaava on siis 1 : 40.

Esimerkki 3

Mutterista on piirretty suurennos mittakaavassa 4 : 1. Kuinka paksu mutteri on todellisuudessa, kun sen paksuus piirustuksessa on 6 cm?

Todellisuudessa mutterin paksuus on neljäsosa kuvan koosta, eli todellinen mitta on

$\frac{6\ \text{cm}}{4} = 1{,}5\ \text{cm}.$

Tehtäviä

1. Arvioi, missä mittakaavassa yleensä piirretään

a) talon piirustukset _____

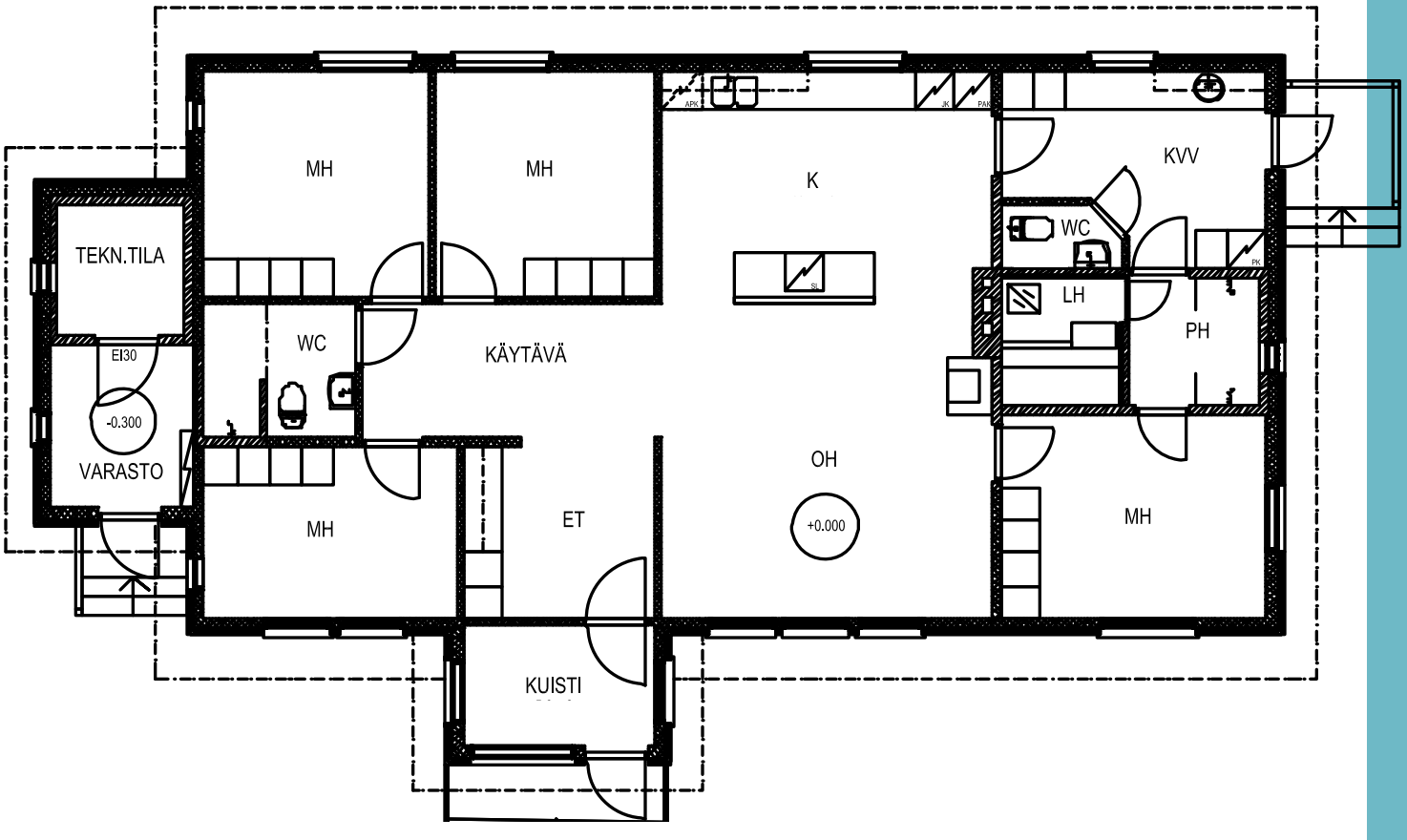
b) pihan piirustukset _____

c) asemapiirros _____

d) maailman kartta _____

e) Suomen kartta. _____

2. Kuvan mittakaava on 1 : 100. Kuinka leveä talo on todellisuudessa? Ilmoita vastauksesi metreinä.



_____

3. Mitkä ovat tehtävän 2 kuvan varaston todelliset mitat, kun kuvan pohjapiirustuksen mittakaava on 1 : 100?

---

4. Mitkä ovat huoneen mitat piirustuksessa, kun mittakaava on 1 : 200 ja todellisuudessa huoneen mitat ovat 5 m x 6 m.

---

5. Mikä on mittakaava, kun huoneen leveys piirustuksessa on 2,5 cm ja todellisuudessa se on 375 cm?

---

6. Kartalla kahden pisteen etäisyys on 8 cm. Mikä se on todellisuudessa, kun kartan mittakaava on 1 : 20 000?

---

7. Piirrä vihkoosi luokkahuoneesi mittakaavassa 1 : 200.

Pinta-alat

Pinta-ala on suure, jolla tarkoitetaan jonkin kaksiulotteisen kuvion tai alueen koon mittaa. Pinta-ala ilmaistaan yleisimmin seuraavien yksikköjen avulla: neliömetri (m^2), neliösenttimetri (cm^2), neliökilometri (km^2) tai vaikkapa hehtaari (ha) ja aari (a).

Pinta-alaa merkitään käytetystä yksiköstä riippumatta isolla a:lla (*A*).

Piirillä tarkoitetaan jonkin mitatun alan sivujen yhteenlaskettua pituutta.

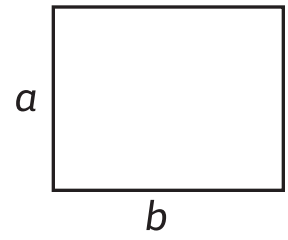
Neliö ja suorakulmio

Tyypillisimpiä pinnan muotoja rakennusalalla ovat neliöt ja suorakulmiot eli suorakaiteet. Niiden pinta-alat lasketaan seuraavasti:

– Mitataan alueen pituus ja leveys.
– Kerrotaan pituus ja leveys keskenään.

Huomaa, että neliö on myös suorakulmio.

$$A = a \cdot b$$



Esimerkki 1

Laske neliön pinta-ala, kun sivujen pituus on 2,5 m.

$2{,}5\ \text{m} \cdot 2{,}5\ \text{m} = 6{,}25\ \text{m}^2$

Esimerkki 2

Laske suorakulmion pinta-ala, kun sivujen pituudet ovat 1,5 m ja 3 m.

$1{,}5\ \text{m} \cdot 3\ \text{m} = 4{,}5\ \text{m}^2$

Esimerkki 3

Laske neliön sivun pituus, kun neliön ala on 16 m^2.

$\sqrt{16\ \text{m}^2} = 4\ \text{m}$

Esimerkki 4

Mikä on neliön piiri, kun sivun pituus on 2 m?

Lasketaan sivujen pituudet yhteen: 2 m + 2 m + 2 m + 2 m = 8 m.

Esimerkki 5

Mikä on suorakulmion piiri, kun sivujen pituudet ovat 2 m ja 5 m?

Lasketaan jälleen sivujen pituudet yhteen: 2 m + 5 m + 2 m + 5 m = 14 m.

Tehtäviä

1. Laske seuraavien alueiden pinta-alat:

a) neliö, jonka sivun pituus on 1,3 m

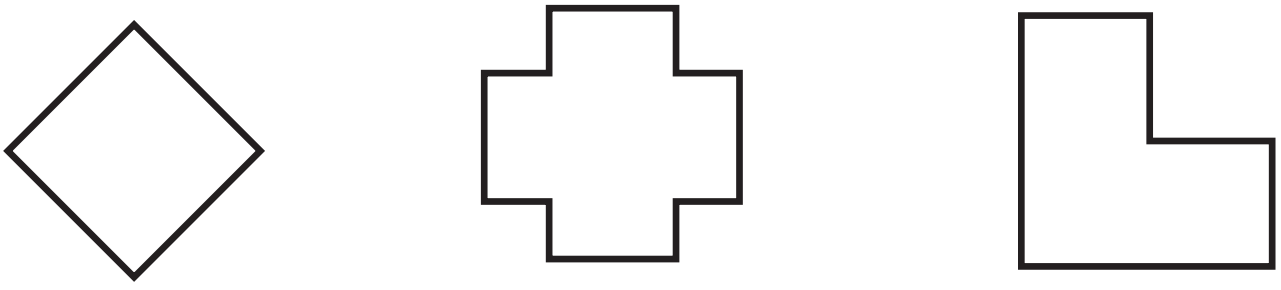
b) suorakulmio, jonka toinen sivu on pituudeltaan 1,3 m ja toinen 2,5 m.

2. Huoneen seinien pituudet mitattiin ja tulokseksi saatiin 4 m, 4 m, 5 m ja 5 m. Mikä on lattian pinta-ala, kun huone on muodoltaan suorakulmio?

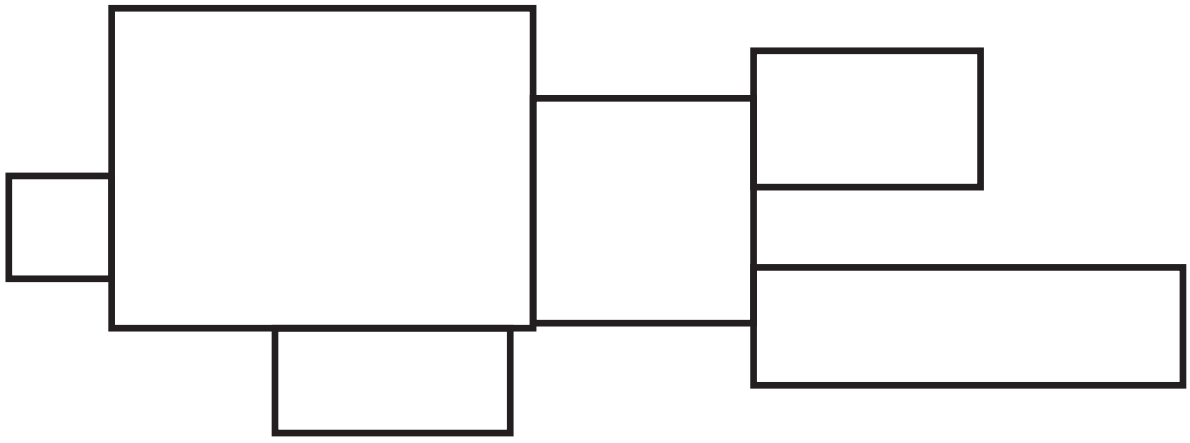
3. Talon ulkoseinän pituus on 10 m ja korkeus 3 m. Mikä on seinän pinta-ala?

4. Aittarakennus on neliön muotoinen. Sisäpuolelta mitattuna kaikkien seinien pituudet ovat 3 m. Mikä on on aitan pinta-ala?

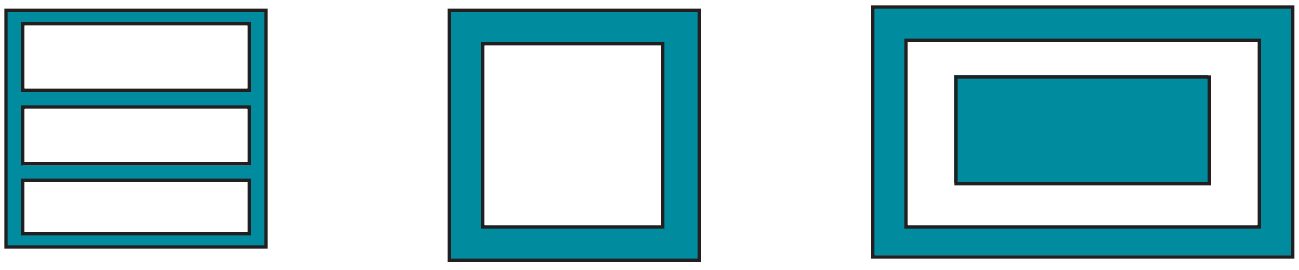
5. Mittaa ja laske seuraavien kuvioiden pinta-alat ja piirit:



6. Mittaa ja laske kuvion pinta-ala:



7. Mittaa ja laske seuraavien kuvioiden värillisten osien pinta-alat:



8. "Kakkonelosen" koko on 2 x 4 tuumaa. Mikä on sen poikkileikkauksen pinta-ala? Yksi tuuma on 2,54 cm.

9. Lattialaudan hyötyleveys on 14 cm. Kuinka monta neliötä saadaan yhdestä 2,8 m:n mittaisesta laudasta?

10. Seinä maalataan. Seinän koko on 6,50 m x 2,90 m, ja maalia riittää 23,5 m^2:n alalle. Riittääkö maali?

11. Neliön pinta-ala on 81 cm^2. Laske

a) sivun pituus _____ b) piiri. _____

12. Mitä tapahtuu suorakulmion pinta-alalle, jos sivun pituudet

a) kaksinkertaistuvat _____

b) kolminkertaistuvat? _____

13. Paneelipaketissa on 6 paneelia. Paneelin hyötyleveys on 10,5 cm ja pituus 320 cm. Kuinka monta neliötä valmista pintaa yhdestä paketista saadaan rakennetuksi?

14. Lattialautoja on paketissa 5 kpl. Lautojen pituus on 2,3 m ja hyötyleveys 13,2 cm. Kuinka monta täyttä pakettia tarvitaan, jotta saadaan tehdyksi lattia huoneeseen, jonka seinien pituudet ovat 5,3 m ja 6,2 m?

15. Talon ulkoseinien pituudet ovat 12 m ja 16 m ja korkeus 4,5 m. Rakennuslevyn mitat ovat 1,2 m ja 2,5 m. Kuinka monta rakennuslevyä tarvitaan ulkovuoraukseen, jos ikkuna-aukkoja ei oteta huomioon? (Huom.! Levyt tulee asentaa pystyyn)

16. Aitta halutaan lämpöeristää ekovillalla ja tuulensuojalevyillä. Aitta on rakennettu hirsistä, joten päädyttiin ostamaan villaa, jonka paksuus on 75 mm. Villaa myydään täysinä paketteina. Yhdessä paketissa mainitun paksuista villaa on 3,93 m^2. Tuulensuojalevyjen mitat ovat pituus 2,5 m ja leveys 1,2 m. Aitan kaikkien seinien pituus on 5 m ja korkeus 2,5 m.

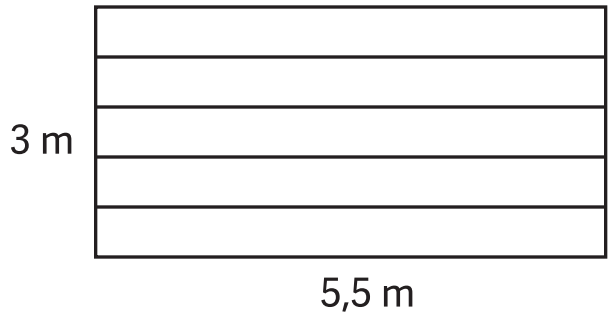
a) Kuinka monta pakettia villaa kannattaa varata, jos koolauksia, oviaukkoa ja ikkunaaukkoja ei oteta huomioon?

b) Entä kuinka monta tuulensuojalevyä tarvitaan?

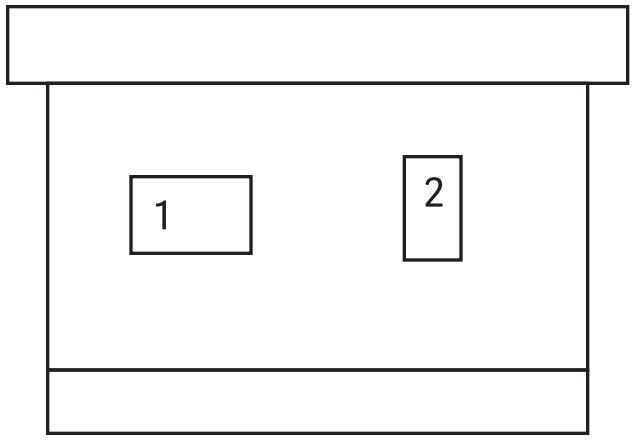
17. Terassilaudan leveys on 120 mm. Rakennetaan kuvan mallinen ja mittainen terassi, jossa lautojen väliin jätetään 1 cm:n rako.

a) Kuinka monta metriä terassilautaa tarvitaan laskennallisesti terassin tekoon?

b) Kuinka monta metriä lautaa kannattaa ostaa, kun lautaa kannattaa varata 10 % yli laskennallisen arvon?



18. Kuvan mukainen talon seinä laudoitetaan ulkoapäin paneelilla. Kuinka paljon seinässä on laudoitusneliöitä?



Ikkuna 1: 120 · 140 cm

Ikkuna 2: 90 · 140 cm

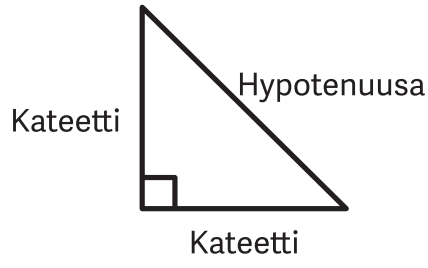
Seinän korkeus: 3 100 mm

Seinän leveys: 9 560 mm

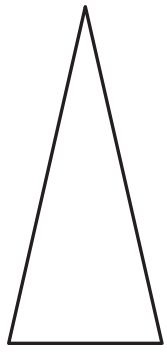
Kolmio

Tavallisimpia rakennusalalla käytettyjä kolmioiden muotoja ovat suorakulmaiset, tasakylkiset ja tasasivuiset kolmiot.

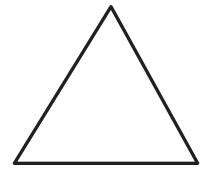
Suorakulmaisessa kolmiossa yksi kulmista on 90°. Kulma merkitään kuvan mukaisesti. Lisäksi sen sivuilla on omat nimityksensä:
– **Kateetteja** ovat suoran kulman molemmin puolin lähtevät sivut.
– **Hypotenuusa** on kolmion pisin sivu, joka yhdistää kateetit muodostaen kolmion.



Tasakylkisessä kolmiossa kyljet ovat samanmittaiset.



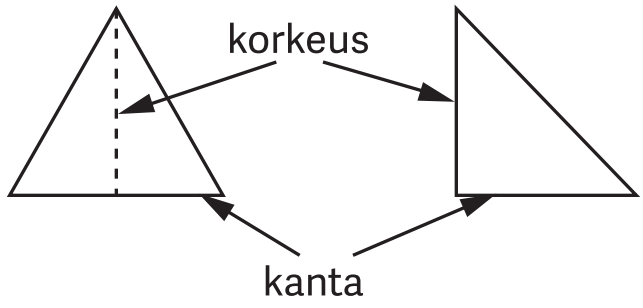
Tasasivuisessa kolmiossa kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.



Kaikkien kolmioiden pinta-ala lasketaan seuraavalla tavalla:

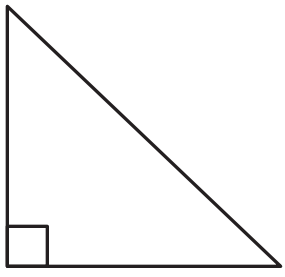
– Mitataan kolmion korkeus (h) ja kannan leveys (a).
– Kerrotaan luvut keskenään.
– Jaetaan saatu tulos kahdella.

$$A = \frac{h \cdot a}{2}$$



Esimerkki 1

Laske kolmion pinta-ala, kun kateettien pituus on 3 m.



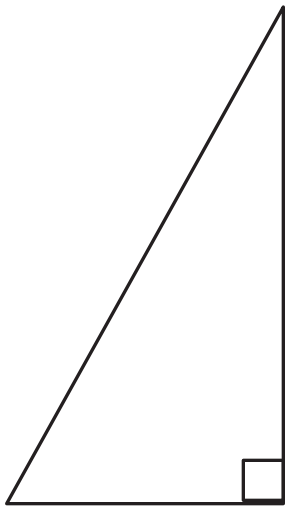
$$A = \frac{h \cdot a}{2}$$

$$= \frac{3\,\text{m} \cdot 3\,\text{m}}{2}$$

$$= \frac{9\,\text{m}^2}{2} = 4{,}5\,\text{m}^2$$

Esimerkki 2

Laske kolmion pinta-ala, kun kannan pituus on 30 cm ja korkeus 50 cm.



$$A = \frac{h \cdot a}{2}$$

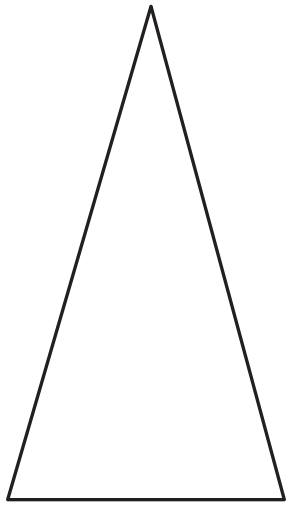
$$= \frac{30\,\text{cm} \cdot 50\,\text{cm}}{2}$$

$$= \frac{1500\,\text{cm}^2}{2}$$

$$= 750\,\text{cm}^2$$

Esimerkki 3

Tasakylkisen kolmion kanta on 1,5 m ja korkeus 3 m. Laske kolmion ala.



$$A = \frac{h \cdot a}{2}$$

$$= \frac{1{,}5\,\text{m} \cdot 3\,\text{m}}{2}$$

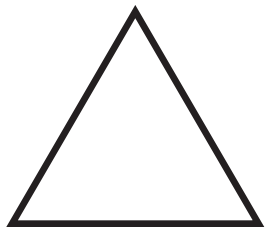
$$= \frac{4{,}5\,\text{m}^2}{2} = 2{,}25\,\text{m}^2$$

Tehtäviä

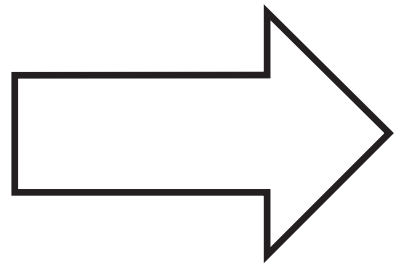
1. Mittaa ja laske kuvioiden pinta-alat.

a)

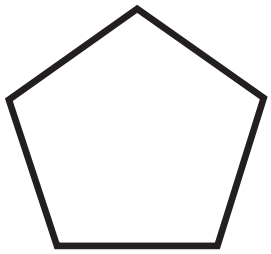
b)

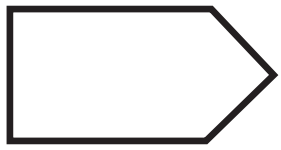


c)

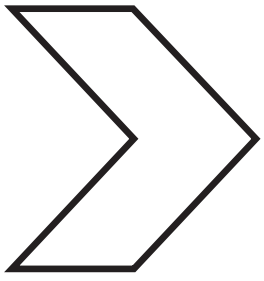


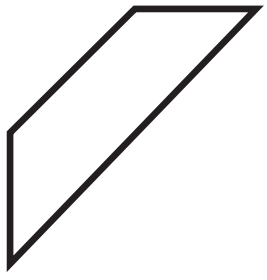
2. Mittaa ja laske kuvioiden pinta-alat.

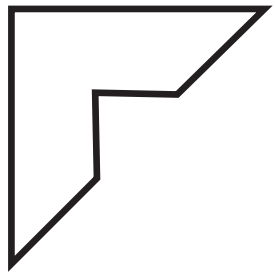




3. Mittaa ja laske kuvioiden pinta-alat ja piirit.



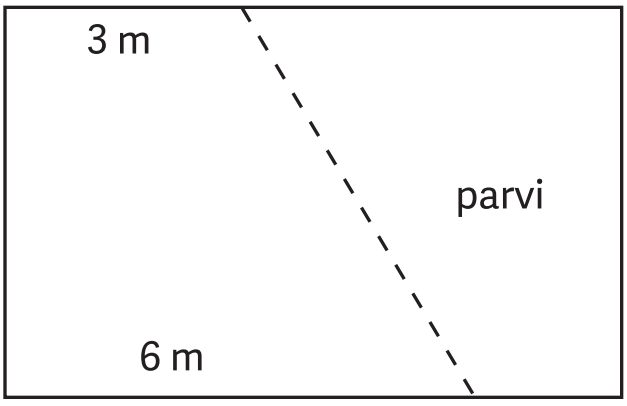




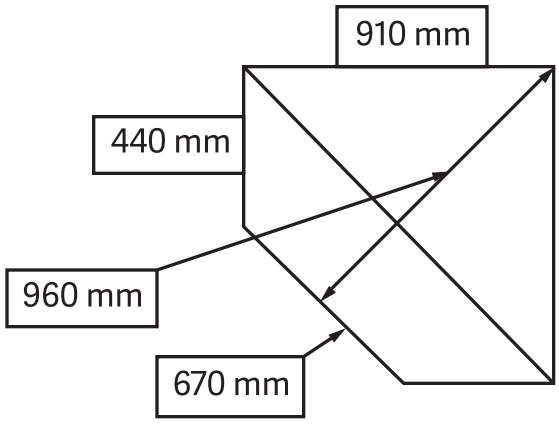
4. Jos kolmion korkeus on 2 m ja pinta-ala 2 m^2, mikä on kolmion kannan pituus?

5. Jos kolmion kannan pituus on 3 m ja pinta-ala 4,5 m^2, mikä on kolmion korkeus?

6. Huoneeseen halutaan tehdä kuvan mallin mukainen parvi. Huoneen leveys on 5 m ja pituus 8 m. Mikä parven pinta-alaksi tulee?

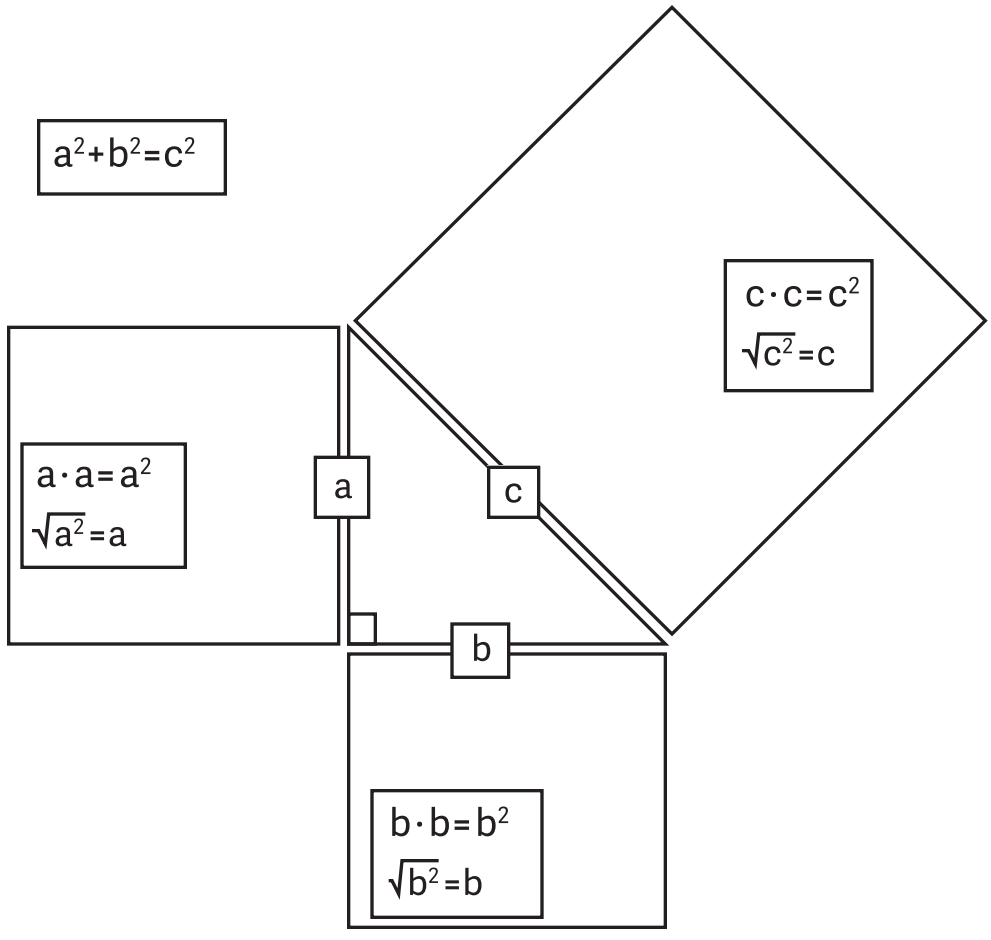


7. Kuinka paljon 20 m^2:n kokoisen huoneen pinta-ala pienenee, jos huoneeseen asennetaan kulmatakka, jonka mitat ovat kuvan mukaiset?



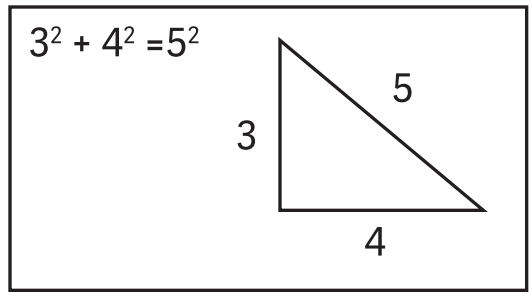
Pythagoraan lause

Pythagoraan lauseen ajatuksena on, että jos tiedetään suorakulmaisen kolmion kahden sivun pituus, niiden muodostamien neliöiden avulla voidaan laskea kolmannen sivun pituus.



Pythagoraan lauseen avulla pystytään laskemaan tarvittaessa esimerkiksi ikkuna- tai oviaukon lävistäjät.

Voit muodostaa suorakulman helposti käyttämällä Pythagoraan lauseeseen perustuvaa timpurin kolmiota, jossa sivujen pituudet ovat 3, 4 ja 5 pituusyksikköä.



Esimerkki 1

Mikä on hypotenuusan pituus, jos kateettien mitat ovat 1,2 m ja 3 m?

Ratkaisu:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (1{,}2\ \text{m})^2 + (3\ \text{m})^2 = 1{,}44\ \text{m}^2 + 9\ \text{m}^2 = 10{,}44\ \text{m}^2$

$c = \sqrt{10{,}44\ \text{m}^2} = 3{,}23\ \text{m} \approx 3{,}2\ \text{m}$

Esimerkki 2

Mikä on toisen kateetin pituus, jos hypotenuusan pituus on 1,2 m ja toisen kateetin pituus on 0,5 m?

Ratkaisu:

$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + (0{,}5\ \text{m})^2 = (1{,}2\ \text{m})^2$

$a^2 = (1{,}2\ \text{m})^2 - (0{,}5\ \text{m})^2 = 1{,}44\ \text{m}^2 - 0{,}25\ \text{m}^2 = 1{,}19\ \text{m}^2$

$a = \sqrt{1{,}19\ \text{m}^2} = 1{,}09\ \text{m} \approx 1{,}1\ \text{m}$

Esimerkki 3

Hypotenuusan pituus on 6 m. Kateetit ovat samanmittaiset, mutta kuinka pitkät?

Hypotenuusan neliö: $(6\ \text{m})^2 = 36\ \text{m}^2$

Koska kateettien pituus on sama, jaetaan hypotenuusan neliö kahdella ja otetaan siitä neliöjuuri:

$36\ \text{m}^2 : 2 = 18\ \text{m}^2$

$\sqrt{18\ \text{m}^2} = 4{,}24\ \text{m}$

Tarkistus:

$(4{,}24\ \text{m})^2 + (4{,}24\ \text{m})^2 = 18\ \text{m}^2 + 18\ \text{m}^2 = 36\ \text{m}^2$

$\sqrt{36\ \text{m}^2} = 6\ \text{m}$

$a^2 + b^2 = c^2 \,/\, a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 + a^2 = c^2$

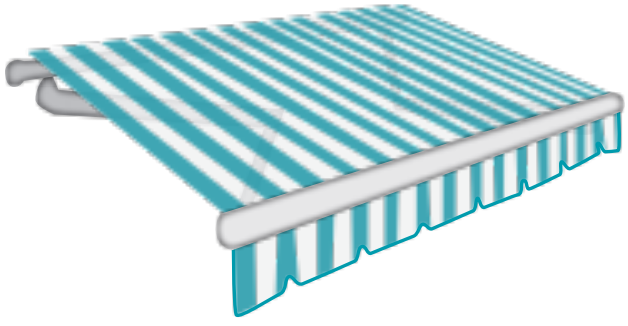
$2a^2 = c^2$

$a^2 = c^2 : 2$

Tehtäviä

1. Tarkista timpurin kolmion avulla, ovatko tämän kirjan sivujen kulmat 90^0:n kulmia.

2. Kuinka monta metriä tarvitaan kangasta markiisikatokseen, jos katoksen reunan etäisyys seinästä aukaistuna on 2,5 m ja se laskeutuu tuolla matkalla 40 cm? Kankaan kiinnitykseen tarvitaan noin 0,5 m kangasta.



3. Kuinka pitkä on matka torin vastakkaisten kulmien välillä, jos tori on

a) neliön mallinen ja sivun pituus on 15 m

b) suorakulmion mallinen ja sivujen pituudet ovat 15 m ja 25 m?

4. Laske seuraavien suorakulmaisten kolmioiden hypotenuusan pituus:

a) Kolmion kateettien pituudet ovat 1 m ja 2 m.

b) Kolmion kateettien pituudet ovat 0,8 m ja 1,2 m.

5. Laske seuraavien suorakulmaisten kolmioiden hypotenuusan pituus:

a) Kolmion molempien kateettien pituus on 20 cm.

b) Kolmion molempien kateettien pituus on 1,5 m.

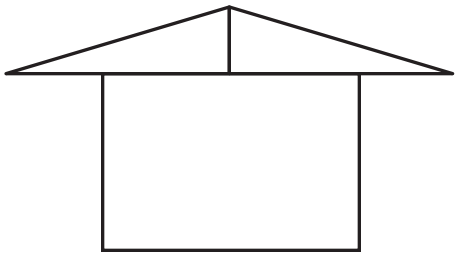
6. Laske suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituus, jos hypotenuusan pituus on 4,2 m ja toisen kateetin pituus on

a) 1 m

b) 2 m.

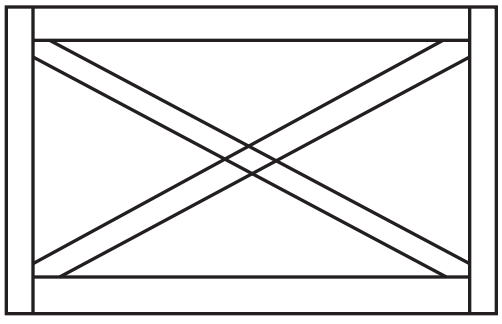
7. Tasasivuisen kolmion sivut ovat 2 m:n pituiset. Laske kolmion ala.

8. Rakennetaan kasvihuone, jonka leveys on 2,5 m, pituus 5 m. Harjakorkeudeksi halutaan 2,6 m ja sivuseinien korkeudeksi 2 m. Räystään pituudeksi halutaan 40 cm. Kuinka pitkäksi lape muodostuu?



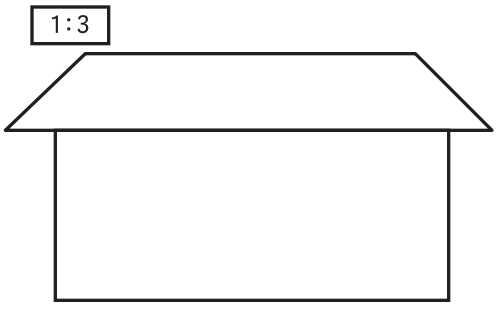
9. Rakennuksen seinät mitattiin ja erään seinän osalta saatiin seuraavat mittaustulokset: seinän pituus 7,4 m, korkeus 3,4 m ja ristimitta 8,4 m. Oliko rakennus suora?

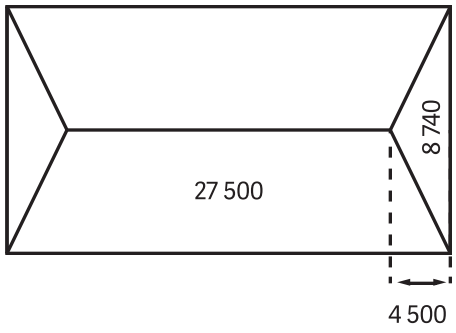
10. Tehdään kuvan mukaisia aitaelementtejä, joiden ulkomitat ovat seuraavat: leveys 1,5 m ja korkeus 1,0 m. Käytetty puu on ”kakkosnelosta” eli mitoiltaan 10 cm x 5 cm, ja portti rakennetaan siten, että sen syvyys on 10 cm. Kuinka pitkiä ristipuiden tulee olla?



11. Mittaa työtilasi ikkunan tai oven ristimitta. Mittaa sen jälkeen myös korkeus ja leveys ja laske ristimitta. Saitko saman tuloksen?

12. Kuinka paljon kuvan mukaisessa aumakatossa on neliöitä?

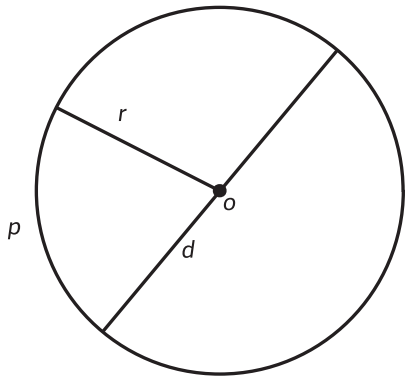


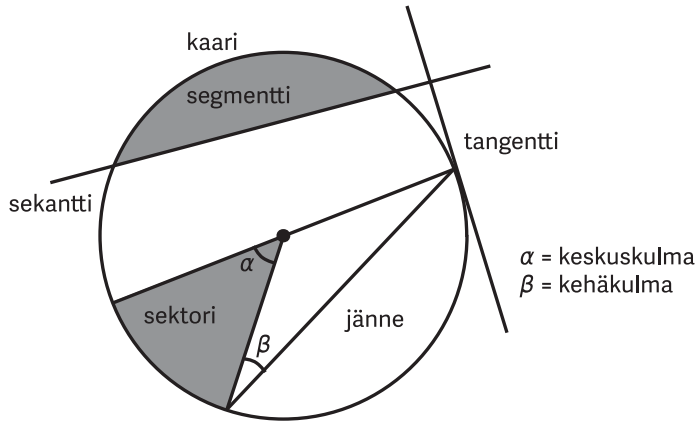


Ympyrä

Ympyrän peruskäsitteet

p = piiri
r = säde
o = keskipiste
d = halkaisija





Piiri (*p*) = ympyrän kehä. Piiri on π-kertainen halkaisijaan nähden.
Jänne = kahden kehällä olevan pisteen välinen jana.
Sektori = kahden säteen rajaama alue.
Kaari = kahden ympyrän kehältä valitun pisteen välinen osa piiristä.
Segmentti = jänteen ja kaaren rajoittama alue.
Sekantti = suora, joka leikkaa ympyrän kehän kahdesta pisteestä.
Tangentti = suora, jolla on yksi yhteinen piste ympyrän kanssa.
Tangentti on kohtisuorassa sädettä vastaan.

Tehtävä: Mittaa ympyrän muotoisten esineiden ympärysmitat (eli piirit) ja halkaisijat. Kirjaa tulokset taulukkoon. Laske sitten piirin ja halkaisijan suhde.

Esine	Ympärysmitta	Halkaisija	Ympärysmitta : halkaisija

Ympärysmitan ja halkaisijan suhteen pitäisi olla lähellä π:tä (eli noin 3,14). Ympärysmitta on siis π-kertainen halkaisijaan nähden. Tästä saadaan piirille laskukaava:

$$p = \pi \cdot d \text{ tai } p = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Ympyrän pinta-ala

Ympyrän pinta-ala (A) voidaan laskea, jos tiedetään ympyrän säde tai halkaisija.
Ympyrän pinta-alan kaava on

$$A = \pi \cdot r^2$$

Esimerkki

Ympyrän halkaisija on 3 metriä. Laske ympyrän

a) piiri

b) pinta-ala.

Ratkaisu:

a) $p = \pi \cdot 3\ \text{m} \approx 9{,}42\ \text{m}$

b) Pinta-alaa laskettaessa tarvitaan säteen pituus, joka on puolet halkaisijasta, eli $r = 1{,}5$ m.

$A = \pi \cdot (1{,}5\ \text{m})^2 \approx 7{,}1\ \text{m}^2$

Tehtäviä

1. Laske ympyrän kehän pituus, kun ympyrän

a) halkaisija on 6 m _____

b) säde on 2,5 cm. _____

2. Laske ympyrän pinta-ala, kun sen

a) säde on 5 m _____

b) halkaisija on 15 cm. _____

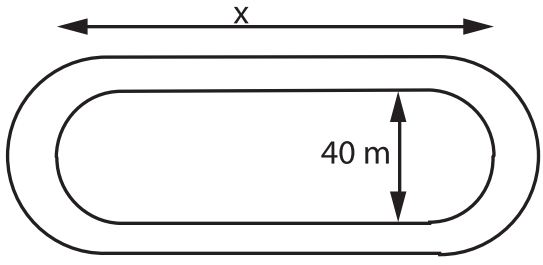
3. Laske ympyrän halkaisija, kun kehän pituus on

a) 5 m

b) 350 cm.

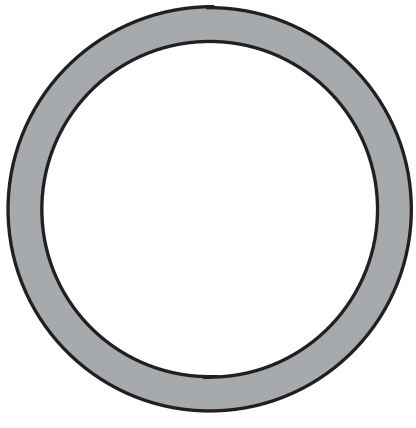
4. Paperitelan halkaisija on tyhjänä 30 cm. Kun siihen on hetken aikaa kierretty paperia, sen halkaisijaksi tulee 50 cm. Paperin paksuus on 0,1 mm. Kuinka monta kierrosta paperia telalle on kierretty?

5. Rakennusmestari suunnittelee urheilukenttää ja sen ympärille juoksurataa. Sisäradan pituuden pitäisi olla tasan 400 m. Kehän kummassakin päässä olevat kaarteet ovat puoliympyrän muotoiset, ja kentän leveys on 40 m. Minkä pituisia juoksuratojen suorien on oltava?



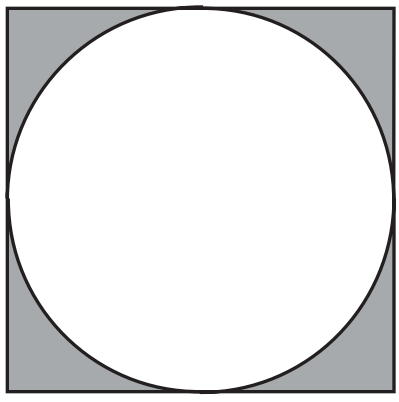
6. Kuinka monta prosenttia ympyrän pinta-ala kasvaa, kun halkaisija kasvaa 20 %?

7. Laske harmaan alueen pinta-ala, kun kuvion sisähalkaisija on 30 mm ja ulkohalkaisija 35 mm.



8. Ympyrän muotoinen pöytä halutaan maalata molemmin puolin kahteen kertaan. Kuinka monta litraa maalia tarvitaan, kun maalin riittävyys on 8 m^2/l? Pöydän halkaisija on 2,4 m.

9. Laske alla olevan harmaan alueen pinta-ala, kun neliön sivun pituus on 30 cm.

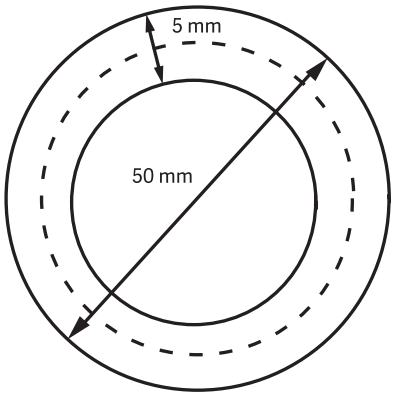


10. Kuinka monta ympyrän muotoista palaa saadaan leikatuksi suorakulmaisesta levystä, jonka leveys on 30 cm ja pituus 50 cm? Ympyrän halkaisijan on oltava 30 mm.

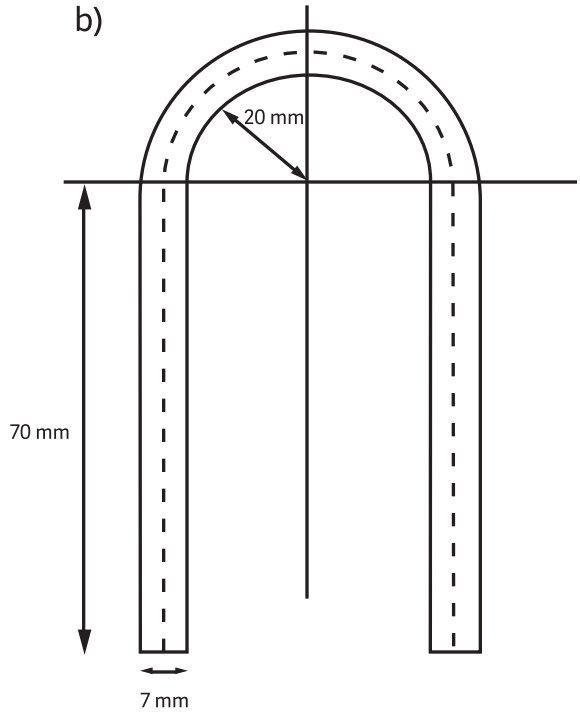
11. Vettä tulee kahdesta putkesta, joiden halkaisijat ovat 75 mm. Putket halutaan korvata yhdellä putkella. Mikä tämän putken halkaisijan on oltava?

12. Laske alla olevien putken oikaisujen pituus (keskiviivan mukaan).

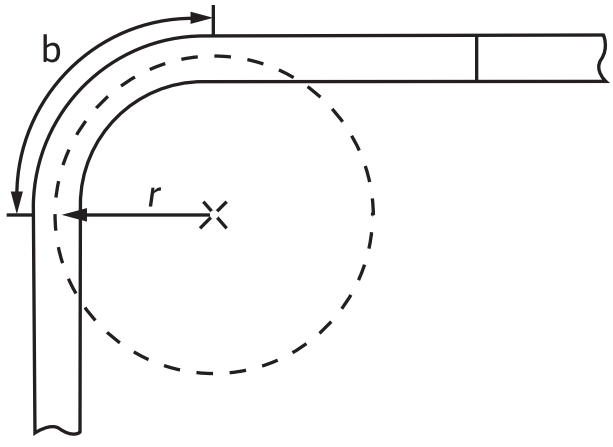
a)



b)



13. Putken taivutussäde on 70 mm. Mikä on tällöin kaaren b pituus?



Avaruusgeometria

Avaruusgeometrialla tarkoitetaan kolmiulotteisten kappaleiden geometriaa.
Kaikki kappaleet, joihin kosket, ovat kolmiulotteisia.

Kolmiulotteiset kappaleet voidaan jakaa monella tavalla eri kategorioihin. Yleinen tapa on jakaa kappaleet neljään päälajiin, jotka edelleen jakaantuvat pienempiin osiin.

Avaruuskappaleiden päälajit ovat 1. lieriöt, 2. kartiot, 3. pallot ja 4. muut.

1. Lieriö

Lieriöllä on kaksi yhdensuuntaista ja yhtenevää pohjaa sekä vaippa:

– Suorassa lieriössä vaippa on kohtisuorassa pohjaa vasten.
– Vinossa lieriössä vaippa ei ole kohtisuorassa pohjaa vasten.

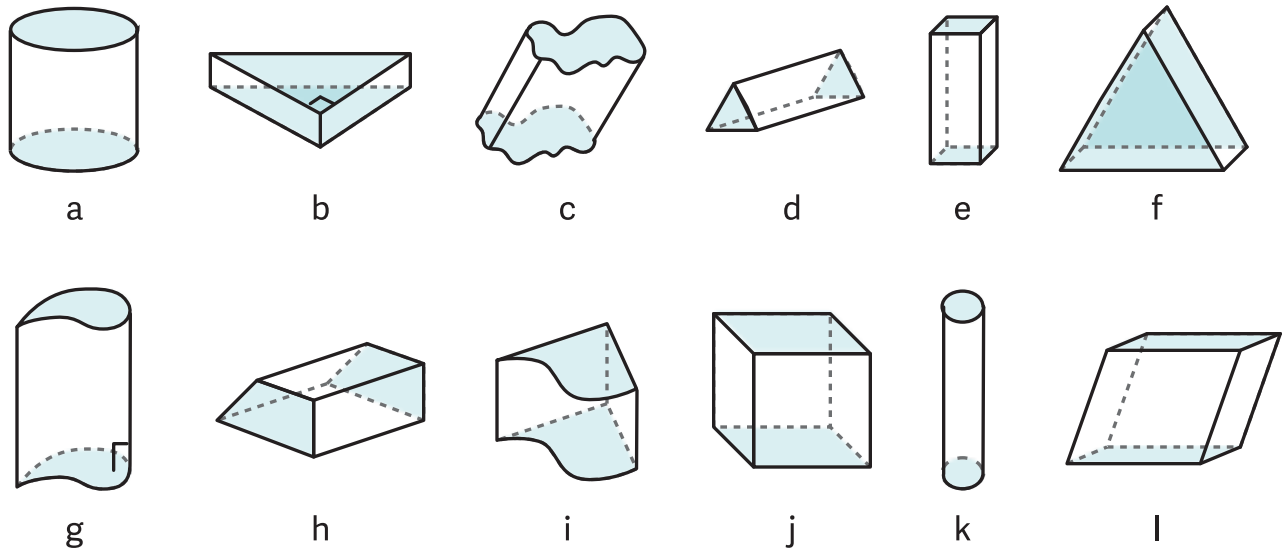
Alla olevista lieriöistä a, b, d, e, f, g, h, i, j ja k ovat suoria. Lieriöt c ja l ovat vinoja.

– Ympyrälieriön eli sylinterin pohja on ympyrä.
– Särmiössä eli prismassa pohja on monikulmio.

Alla olevista lieriöistä a ja k ovat ympyrälieriöitä. Lieriöt b, d, e, f, h, j ja l ovat särmiöitä.

– Suorakulmainen särmiö koostuu kuudesta tahkosta. Lisäksi kaikki kulmat ovat 90°
– Kuutiossa jokainen särmä eli sivu on yhtä pitkä

Alla olevista lieriöistä e ja j ovat suorakulmaisia särmiöitä. Lieriö j on kuutio.



2. Kartio

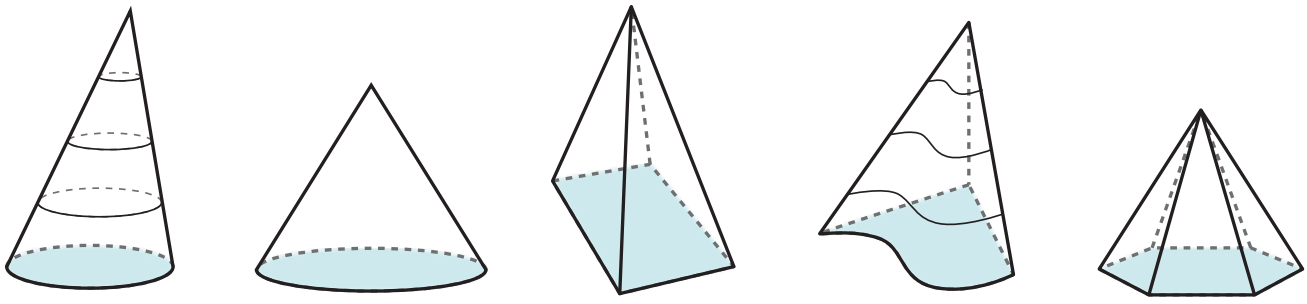
Kartiossa on yksi pohja, huippu eli kärki ja näiden väliin jäävä pinta, jota sanotaan vaipaksi:

– Suorassa kartiossa kärkipiste on suoraan pohjan keskipisteen yläpuolella.
– Vinossa kartiossa kärkipiste ei ole pohjan keskipisteen yläpuolella.

Alla olevista kartioista suoria ovat kartiot b, c ja e. Muut ovat vinoja.

– Pyramidin pohja on monikulmio.
– Ympyräkartion pohja on ympyrä.

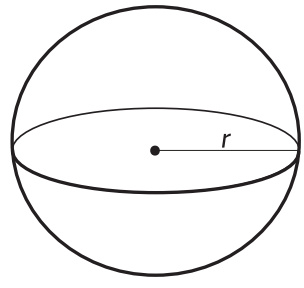
Alla olevista kartioista c ja e ovat pyramideja. Kartiot a ja b taas ovat ympyräpohjaisia.



a b c d e

3. Pallo

Pallo muodostuu avaruuden niistä pisteistä, jotka ovat yhtä kaukana kiinteästä keskipisteestä.

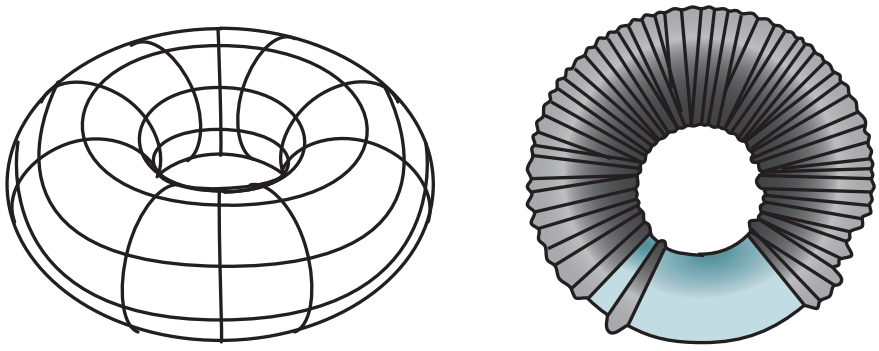


4. Muut

Tähän kategoriaan voidaan sijoittaa kaikki sellaiset kappaleet, jotka eivät täytä lieriön, kartion tai pallon määritelmän vaatimuksia. Melkein kaikki oikean elämän kappaleet kuuluvat tähän ryhmään. Usein kappale voidaan kuitenkin leikata osiin siten, että leikatut osat kuuluvat edellä mainittuihin kolmeen ryhmään.

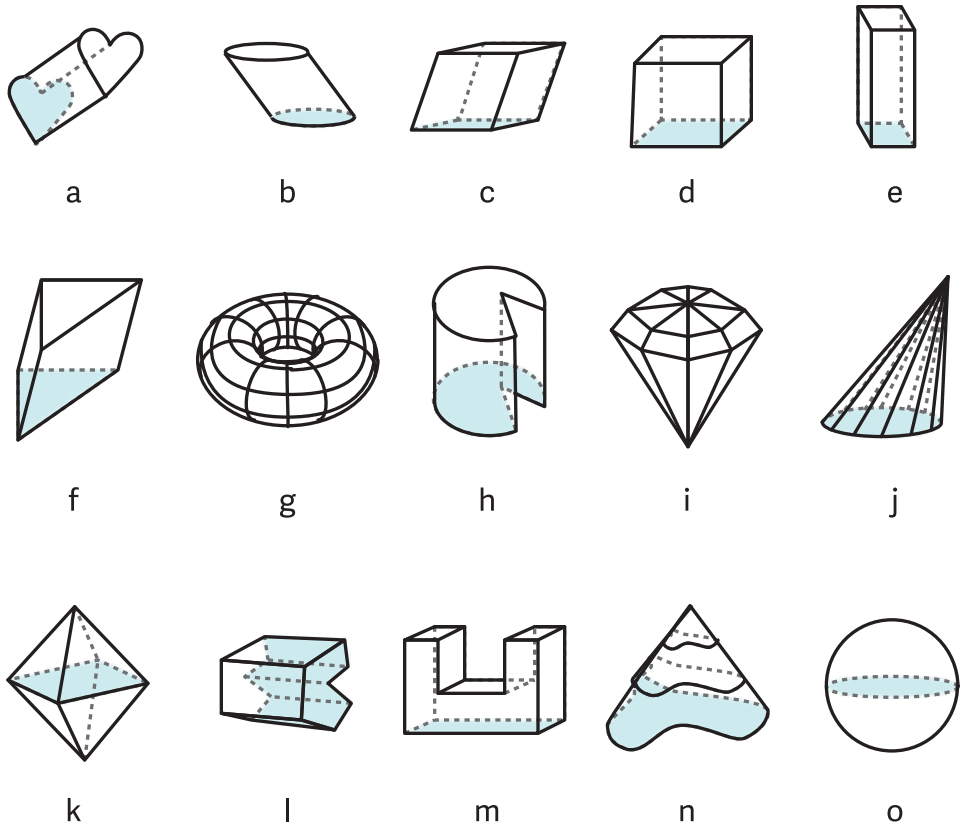
Kuvassa oikealla on Tampereen Näsinneula. Sen voidaan ajatella rakentuvan erikokoisista lieriöistä. Tarkempiin tuloksiin päästään, kun tornin ajatellaan rakentuvan erikokoisista katkaistuista ympyräkartioista.

Alla olevassa kuvassa vasemmalla on torus. Se on munkkirinkilän tai auton sisärenkaan muotoinen avaruuskappale. Käämi voidaan joskus rakentaa toruksen muotoiseksi (kuvassa oikealla).



Tehtäviä

1. Luokittele alla olevat kappaleet lieriöihin, kartioihin, palloihin ja muihin kappaleisiin. (Kirjoita kirjain vastausviivalle.)



Lieriöt: _____ Kartiot: _____

Pallot: _____ Muut: _____

2. Luokittele tehtävän 1 kappaleet alla oleviin luokkiin. (Kirjoita kirjain vastausviivalle.)

Suora lieriö _____ Vino lieriö _____

Särmiö _____ Suora pyramidi _____

Pyramidi _____ Ympyräkartio _____

Kuutio _____ Suora ympyrälieriö _____

Ympyrälieriö _____ Suorakulmio _____

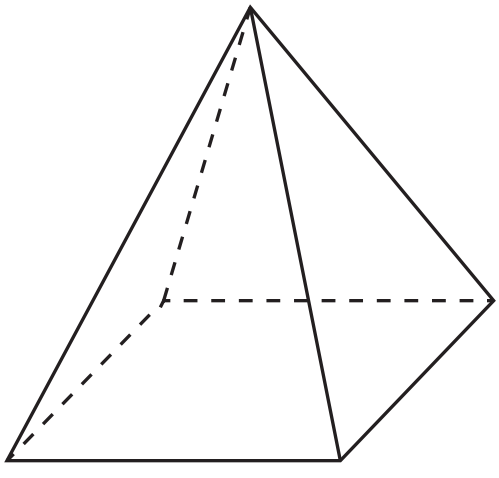
Suorakulmainen särmiö _____ Neliö _____

3. Piirrä vihkoosi jokin

a) lieriö, b) suora ympyräkartio, c) prisma, d) avaruuskappale, joka ei ole lieriö, kartio eikä pallo.

4. Oheisessa kuvassa on neliöpohjainen suora pyramidi.

a) Piirrä pyramidille korkeusjana ja mittaa pyramidin korkeus viivoittimella.



b) Laske pyramidin pohjan pinta-ala. Mittaa viivoittimella puuttuvat arvot.

_____

_____

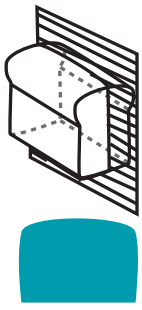
_____

_____

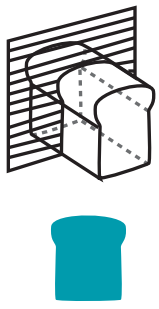
_____

5. Piirrä vihkoosi sen leikkauskuvion muoto, joka syntyy, kun kappale leikataan tason mukaisesti. Kohdat a ja b on tehty malliksi.

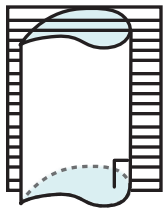
a)



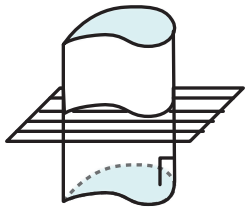
b)



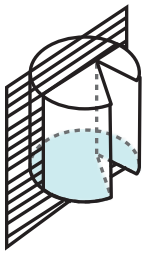
c)



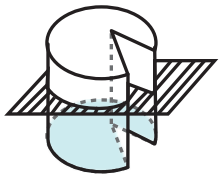
d)



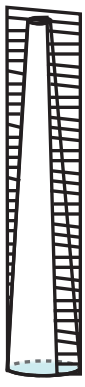
e)



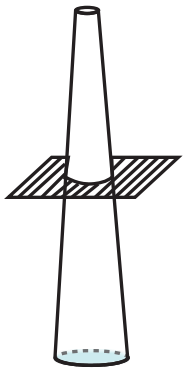
f)



g)

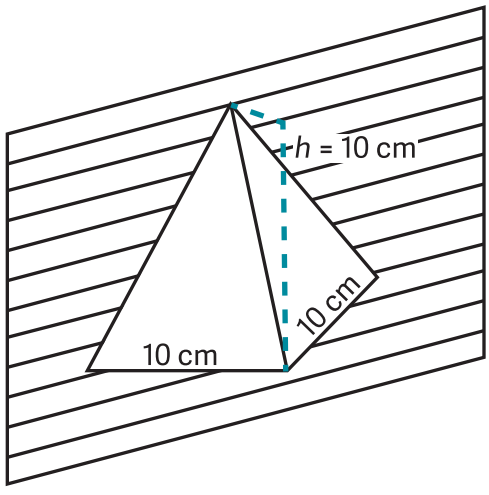


h)



6. Piirrä vihkoosi leikkauskuvio, joka syntyy, kun neliöpohjainen suora pyramidi leikataan kuvan mukaisesti.

Laske Pythagoraan lausetta apuna käyttäen leikkauskuvioon sivujanojen suuruudet.

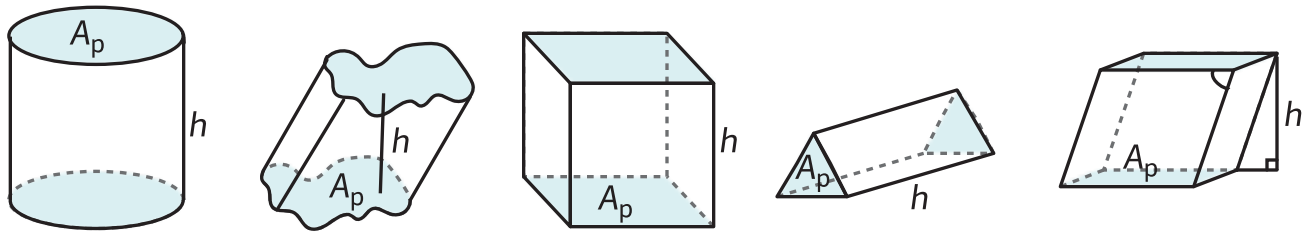


Lieriön tilavuus ja pinta-ala

Lieriön tilavuus saadaan, kun pohjan pinta-ala kerrotaan lieriön korkeudella. Kaavana tämä on

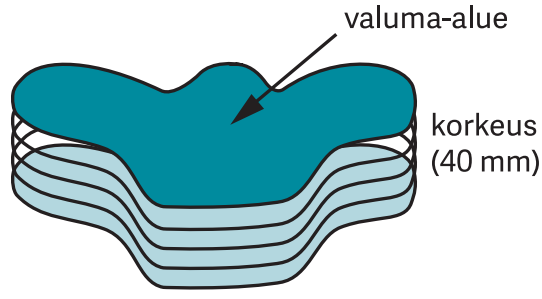
$$V = A_p h$$

Lieriön pohjan pinta-alan laskutapa riippuu lieriön pohjan muodosta. Lieriön pinta-alalla tarkoitetaan pohjan ja vaipan pinta-alojen summaa.



Esimerkki

Rakennustyömaalla arvioitiin, että sadevesi kerääntyy työmaa-alueelle noin 1,5 hehtaarin kokoiselta alueelta. Säätiedotuksessa luvattiin, että yön aikana sataa 40 mm vettä. Kuinka monta litraa vettä työmaalle tulee, jos maa ei ime yhtään satanutta vettä?



Ratkaisu: Muunnetaan kaikki yksiköt metreiksi tai neliömetreiksi:

km²	hm² = ha	dam² = a	m²	dm²	cm²	mm²
neliökilometri	*neliöhehto-metri* = hehtaari	*neliödeka-metri* = aari	neliömetri	neliödesi-metri	neliösentti-metri	neliömilli-metri

· 100 · 100

m	hm	dam	m	dm	cm	mm
kilometri	hehtometri	dekametri	metri	desimetri	senttimetri	millimetri

: 10 : 10 : 10

1,5 ha = 15 000 m²

40 mm = 0,04 m

Sijoitetaan nämä tilavuuden kaavaan $V = A_p h$.

V = 15 000 m² · 0,04 m = 600 m³.

Muunnetaan tämä lopuksi litroiksi.

m³			dm³			cm³			mm³

· 1000

kl	hl	dal	l litra	dl	cl	ml			

600 m³ = (600 000 dm³) = 600 000 litraa

Vastaus: 600 000 litraa

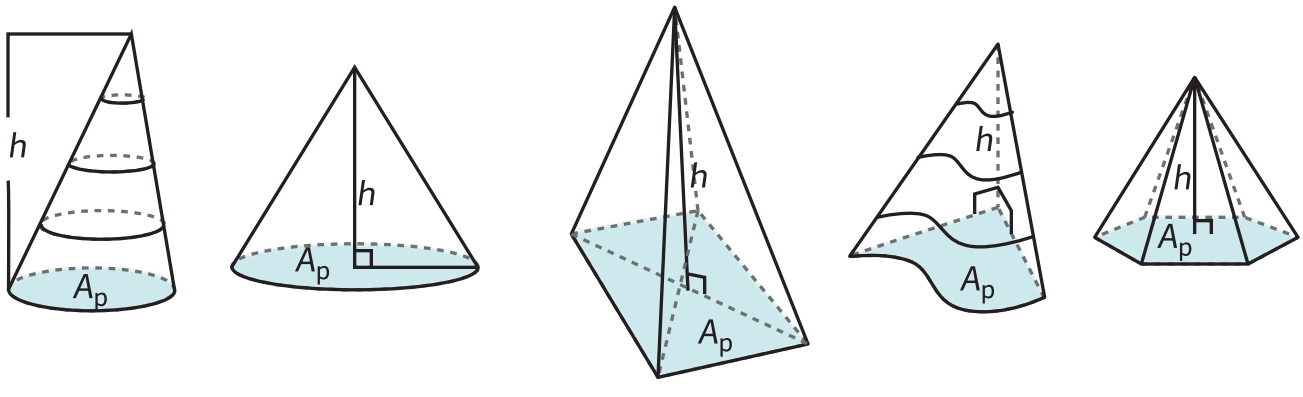
Kartion tilavuus ja pinta-ala

Kartion tilavuus saadaan, kun pohjan pinta-ala kerrotaan kartion korkeudella ja tulo jaetaan kolmella. Kaavana tämä on

$$V = \frac{A_p h}{3}$$

Kartion pohjan pinta-alan laskutapa riippuu kartion pohjan muodosta.

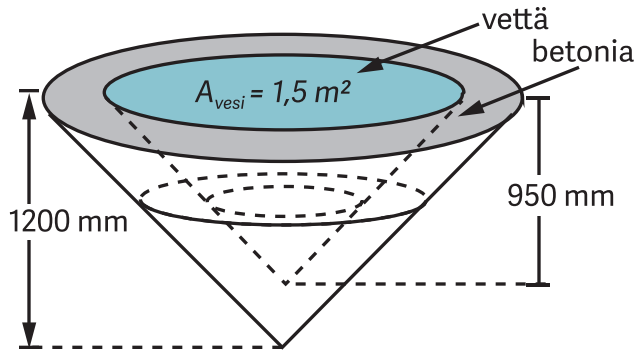
Kartion pinta-alalla tarkoitetaan pohjan ja vaipan pinta-alojen summaa.



Esimerkki

Jätevesialtaaseen rakennettiin kuvan mukainen kaivo, jotta vesi saataisiin mahdollisimman hyvin imettyä altaasta pois altaan huollon yhteydessä.

Kuinka monta litraa kaivoon mahtuu vettä?



Ratkaisu:

Vettä on 950 mm = 0,95 m

$$V = \frac{A_p\, h}{3}$$

$$V = \frac{1{,}5\,\text{m}^2 \cdot 0{,}95\,\text{m}}{3}$$

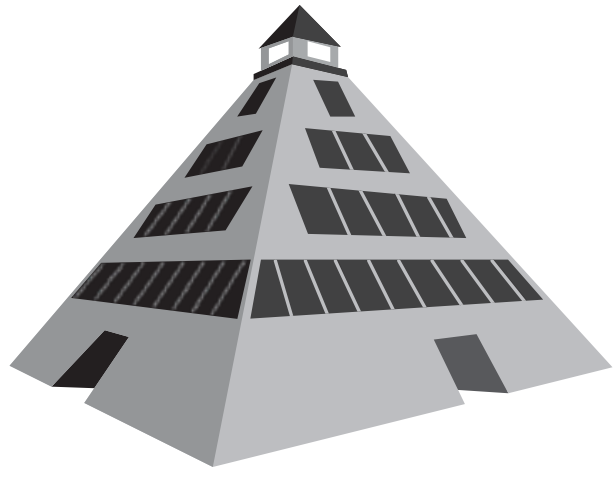
$$V = 0{,}475\,\text{m}^3$$

V = 475 litraa

Tehtäviä

1. Rakennukseen tulevan saunan lattiapinta-ala on 9 m^2. Kuinka monta kuutiometriä saunassa on ilmaa, jos saunan korkeus on 2,5 m. *(Saunan voidaan ajatella olevan lieriön muotoinen avaruuskappale.)*

2. Kuvassa olevan kartionmuotoisen rakennuksen pohjan pinta-ala on 220 m^2. Rakennuksen korkeus on 9,5 metriä. Laske, kuinka monta kuutiometriä rakennuksen tilavuus on.



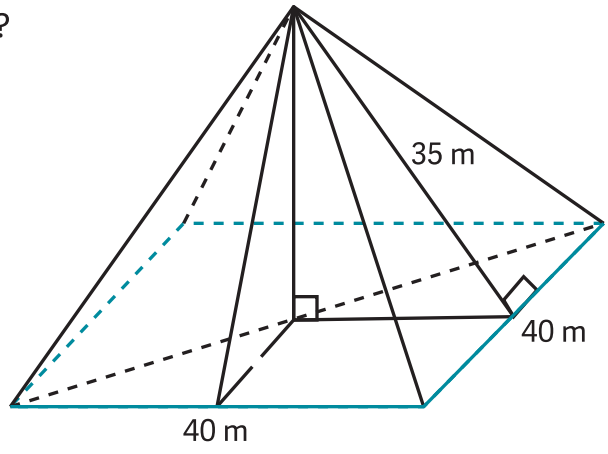
3. Talon huoneistopinta-alaksi tulee noin 110 m^2. Lattia päällystetään parketilla, jonka paksuus on 3 cm.

a) Voiko kaikki parkettimateriaali mahtua peräkärryyn, jonka peräosan tilavuus on 4 m^3?

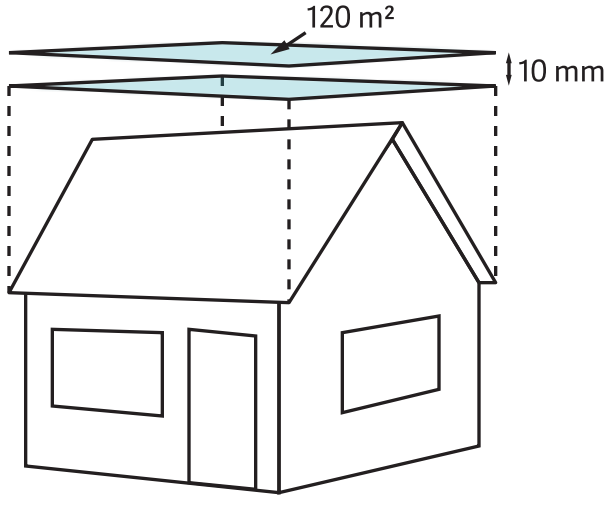
b) Parketin tiheyden arveltiin olevan noin 550 kg/m^3. Peräkärryn maksimikuorma on 500 kg. Pystyykö parketit kuljettamaan yhdellä kärryllisellä?

4. Mikä on kuvassa näkyvän kartion pinta-ala?

(Vihje: Pohja on neliön muotoinen, ja sivut ovat kolmion muotoisia.)

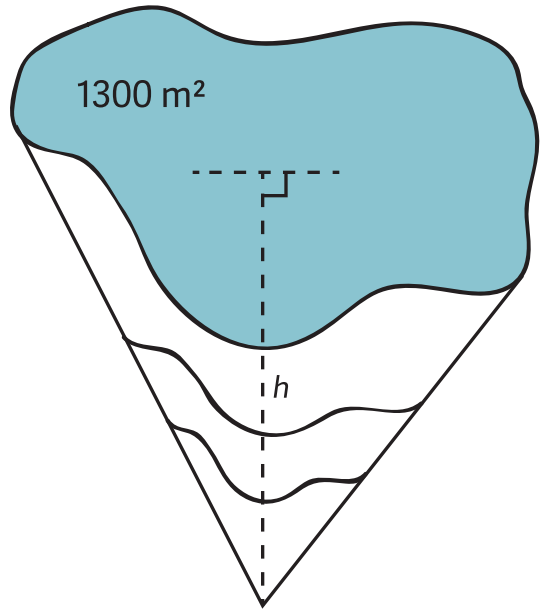


5. Talon katon pinta-ala pystysuoraan ylhäältä päin katsottuna on noin 120 m^2. Säätiedotuksen mukaan yhden tunnin aikana sataa 10 mm vettä. Talossa on neljä vesikourua (ränniä). Kuinka monta litraa vettä yhdestä korusta tunnin aikana tulee, jos säätiedotus toteutuu ja vesi jakaantuu tasaisesti vesikourujen kesken?



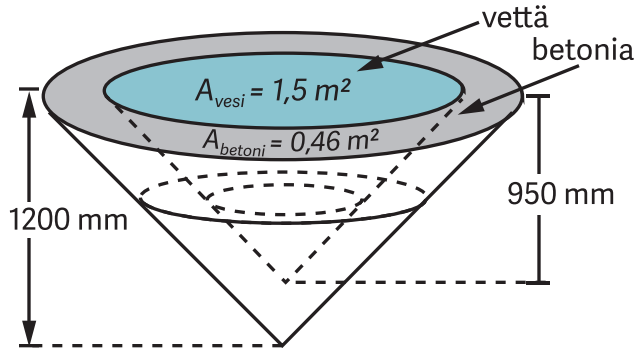
6. Kaivosalueen viereen päätettiin kaivaa kartionmuotoinen kuoppa keräämään kaivokselta vikatilanteessa karkaavaa jätevettä. Kuopan pinnan (*kartion pohjan*) pinta-ala on 1300 m^2.

Kuinka syvä altaan syvimmän kohdan pitää olla, jotta altaaseen mahtuu 2 000 m^3 vettä?



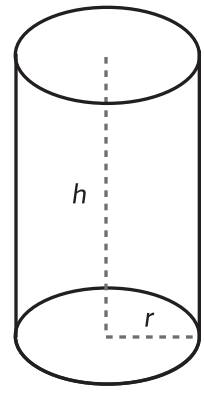
7. Kuinka monta litraa kuvan kartionmuotoiseen kaivoon tarvitaan betonia?

(Vihje: Laske ensin, kuinka suuri tilavuus kaivolla olisi, jos se olisi umpinainen betonikartio. Vähennä tästä veden tilavuus.)



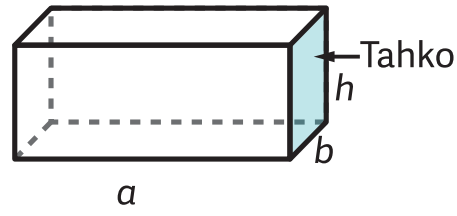
Lieriön erikoistapaus 1: suora ympyräpohjainen lieriö eli sylinteri

Ympyräpohjaisen lieriön tilavuus lasketaan samalla kaavalla $V = A_p h$ kuin muidenkin lieriöiden. Lieriön pohja on ympyrä, joten pohjan pinta-ala saadaan kaavalla $A_p = \pi r^2$, missä r on pohjan säde. Sylinterin vaipan pinta-ala saadaan kaavalla $Av = 2\pi rh$.



Lieriön erikoistapaus 2: suorakulmainen särmiö

Suorakulmaisen särmiön tilavuus lasketaan samalla kaavalla $V = A_p h$ kuin muidenkin lieriöiden.



Lieriön pohja on suorakulmio, joten pohjan pinta-ala saadaan kaavalla $A_p = ab$, jossa a ja b ovat pohjan eri sivujen pituuksia. Yhdistämällä tämä kaavaan

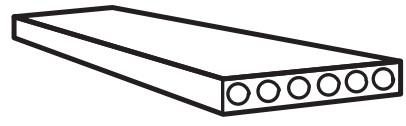
$V = A_p h$, saadaan suorakulmaisen särmiön tilavuuden kaavalla

$V = abh$.

Suorakulmaisen särmiön pinta-alalla tarkoitetaan kaikkien kuuden tahkon pinta-alojen summaa.

Esimerkki

Oheisessa kuvassa on ontelolaatta. Ontelolaatan sisässä on kuusi sylinterin eli suoran ympyräpohjaisen lieriön muotoista onttoa putkea. Yksittäisen putken säde on 75 mm. Ontelolaatan pituus on 3500 mm. Laske



a) kuinka monta litraa on yhden putken tilavuus

b) kuinka monta kilogrammaa kevyempi oheinen elementti on onttojen putkien ansiosta. Betonin tiheys on 2200 kg/m³.

c) kuinka monta litraa elementtiin menisi betonia, jos siinä ei olisi onttoja onteloita. Laatan mitat ovat 200 x 1 200 x 3 500 mm.

d) kuinka paljon kuvan mukainen betonielementti painaisi, jos siinä ei olisi onttoja onteloita. Betonin tiheys on 2200 kg/m³. Oletetaan, ettei laatan sisällä ole teräsvahvistuksia.

a) Muunnetaan aluksi kaikki yksiköt metreiksi:

75 mm = 0,075 m; 3 500 mm = 3,5 m

$A_p = \pi r^2$ $\quad V = A_p h$

$A_p = \pi \cdot (0{,}075\ \text{m})^2$ $\quad V = 0{,}0176715\ \text{m}^2 \cdot 3{,}5\ \text{m}$

$A_p \approx 0{,}0176715\ \text{m}^2$ $\quad V = 0{,}061850\ \text{m}^3$

$V = 61{,}85$ litraa

Vastaus: noin 62 litraa

b) Putkia on kuusi, joista kunkin tilavuus on 0,061850 m³, joten yhteistilavuus niillä on

$0{,}061850\ \text{m}^3 \cdot 6 = 0{,}3711\ \text{m}^3$

Koska yksi kuutiometri betonia painaa 2 200 kg, on putkien ansiosta ontelolaatta

$0{,}3711\ \text{m}^3 \cdot 2\,200\ \text{kg/m}^3 = 816{,}42$ kg kevyempi

Vastaus: noin 820 kg

c) Muunnetaan mitat metreiksi: Laatan ulottuvuudet ovat: 0,2 x 1,2 x 3,5 m.

Laatan tilavuus saadaan kertomalla nämä kolme lukua keskenään:

$V = 0{,}2\ \text{m} \cdot 1{,}2\ \text{m} \cdot 3{,}5\ \text{m}$

$V = 0{,}84\ \text{m}^3 = 840$ litraa

Vastaus: 840 litraa

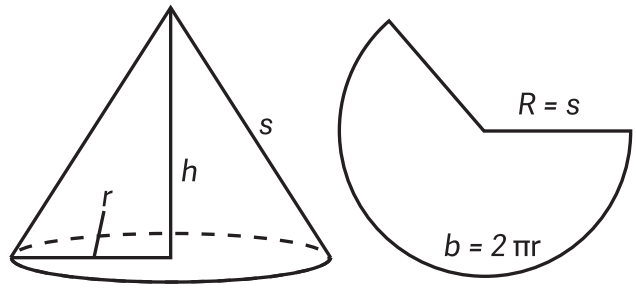
d) Koska yksi kuutiometri betonia painaa 2 200 kg, painaisi laatta ilman onteloita

$0{,}84\ \text{m}^3 \cdot 2\,200\ \text{kg/m}^3 = 1\,848$ kg.

Vastaus: noin 1 800 kg.

Kartion erikoistapaus 1: suora ympyräpohjainen kartio

Suorassa ympyräpohjaisessa kartiossa pohja on ympyrä ja kärki on suoraan pohja-ympyrän keskipisteen yläpuolella.



Suoran ympyräpohjaisen kartion tilavuus lasketaan samalla kaavalla

$V = \dfrac{A_p h}{3}$ kuin muidenkin kartioiden.

Kartion pohja on ympyrä, joten pohjan pinta-ala saadaan kaavalla $A_p = \pi r^2$, missä r on pohjan säde.

Suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala lasketaan kaavalla $A_v = \pi rs$.

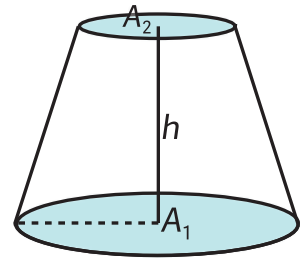
Kartion erikoistapaus 2: suora pyramidi

Pyramidin tilavuus lasketaan samalla kaavalla $V = \dfrac{A_p h}{3}$ kuin muidenkin kartioiden.

Kartion pohja on monikulmio, joten pohjan pinta-ala saadaan kaavalla monikulmion pinta-alojen laskukaavoilla. Pyramidin vaippa koostuu kolmion muotoisista tahkoista.

Kartion erikoistapaus 3: katkaistu kartio

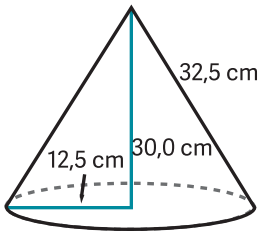
Monet pylväät ja muut korkeat rakennelmat kapenevat ylöspäin mentäessä. Usein rakennelma ei kuitenkaan kapene pisteeksi, jolloin kappaleen voidaan ajatella olevan katkaistun kartion muotoinen.



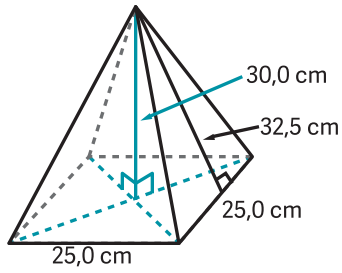
Katkaistun kartion tilavuus: $V = \dfrac{h(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2}{3}$.

Esimerkki

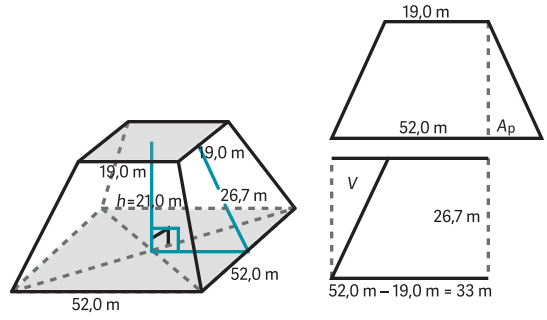
Kuvissa on suoria kartioita sekä katkaistu kartio. Laske kappaleiden tilavuudet ja pinta-alat.



a)



b)



c)

Ratkaisu:

a) $V = \frac{A_p h}{3}$

$A_p = \pi \cdot r^2$

$A_p = \pi \cdot (12{,}5\ \text{cm})^2$

$A_p \approx 490{,}874\ \text{cm}^2$

$V = \frac{490{,}874\ \text{cm}^2 \cdot 30{,}0\ \text{cm}}{3}$

$V = 4\,908{,}74\ \text{cm}^3$

$A_v = \pi rs$

$A_v = \pi \cdot 12{,}5\ \text{cm} \cdot 32{,}5\ \text{cm}$

$A_v = 1276{,}3\ \text{cm}^2$

Vastaus: Tilavuus on noin 4 910 cm³ ja pinta-ala noin 1 280 cm².

b) $V = \frac{A_p h}{3}$

$A_p = a^2$ (a = pohjaneliön sivun pituus)

$A_p = (25\ \text{cm})^2$

$A_p = 625\ \text{cm}^2$

$V = \frac{625\ \text{cm}^2 \cdot 30{,}0\ \text{cm}}{3}$

$V = 6\,250\ \text{cm}^3$

$A_v = 4 \cdot \frac{\text{"kanta} \cdot \text{korkeus"}}{2}$

”kanta · korkeus : 2”

$A_v = 4 \cdot \frac{25\ \text{cm} \cdot 32{,}5\ \text{cm}}{2}$

$A_v = 1625\ \text{cm}^2$

Vastaus: Tilavuus on 6 250 cm³ ja pinta-ala noin 1 630 cm².

c) $V = \frac{h(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2}{3}$

$A_1 = (52{,}0\ \text{m})^2$

$A_1 = 2\,704\ \text{m}^2$

$A_2 = (19{,}0\text{m})^2$

$A_2 = 361\ \text{m}^2$

$$V = \frac{21{,}0\,\text{m}\,(2\,704\,\text{m}^2 + \sqrt{2\,704\,\text{m}^2 \cdot 361\text{m}^2} + 361\text{m}^2}{3}$$

$V = 28\,371\text{m}^3$

Sivutahko on tasakylkisen puolisuunnikkaan muotoinen. Yhden sivutahkon pinta-ala saadaan kertolaskulla

$26{,}7\ \text{m} \cdot (52{,}0\ \text{m} - 19{,}0\ \text{m})$

$= 26{,}7\ \text{m} \cdot 33\ \text{m}$

$= 881{,}1\ \text{m}^2$.

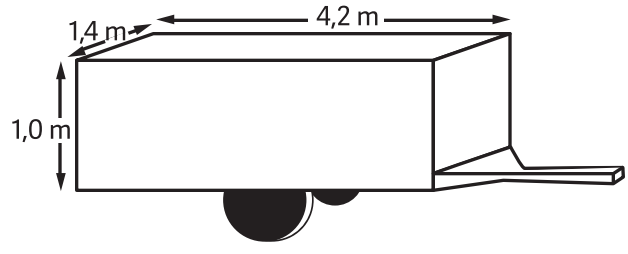
Kokonaispinta-ala on

$4 \cdot 881{,}1\ \text{m}^2 + 2\,704\ \text{m}^2 + 361\ \text{m}^2 = 6\,589{,}4\ \text{m}^2$.

Vastaus: $V \approx 28\,400\ \text{m}^3$, $A \approx 6\,590\ \text{m}^2$.

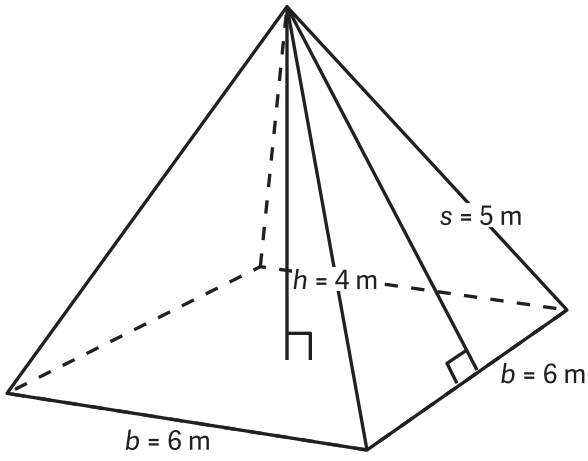
Tehtäviä

1. Laske, kuinka monta kuutiometriä on kuvan peräkärryn kuormatilan tilavuus.



2. Laske kuvan neliöpohjaisen pyramidin

a) pohjan pinta-ala *(Vihje: Pohja on neliö.)*

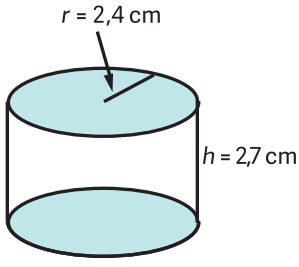


b) tilavuus

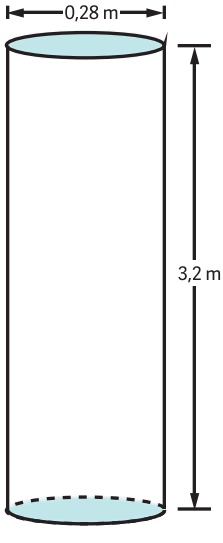
c) yhden kolmion muotoisen sivutahkon pinta-ala
(Vihje: Kannan pituus on 6 m ja korkeus 5 m.)

d) kokonaispinta-ala *(Vihje: Neljän sivutahkon ja pohjan pinta-alan summa).*

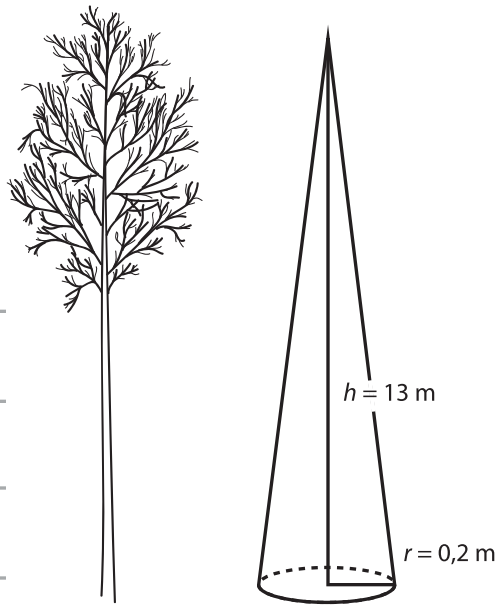
3. Laske, kuinka monta kuutiosenttimetriä on kuvassa olevan mopon sylinterin tilavuus. *(Vihje: Laske ensin pohjan ala ja kerro se sitten korkeudella.)*



4. Laske, kuinka suuri on kuvan mukaisen pylvään tilavuus. Anna vastaus kuutiometreinä. *(Vihje: Laske ensin ympyrä-pohjan säde.)*



5. Arvioidaan, että koivun runko on suoran ympyräkartion muotoinen. Rungon säde on leveimmältä kohdalta 0,2 metriä, ja rungon pituus on 13 metriä. Laske puun rungon tilavuus.

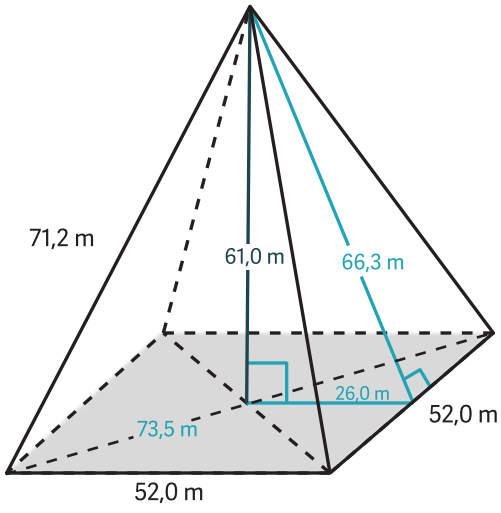


6. Talon perustuksiin tehtiin takkaa varten suorakulmaisen särmiön muotoinen betonivalu. Muotin paksuudeksi mitattiin 180 mm, leveydeksi 1,2 m ja pituudeksi 2,5 m.

Laske, kuinka monta litraa muottiin mahtuu betonia.

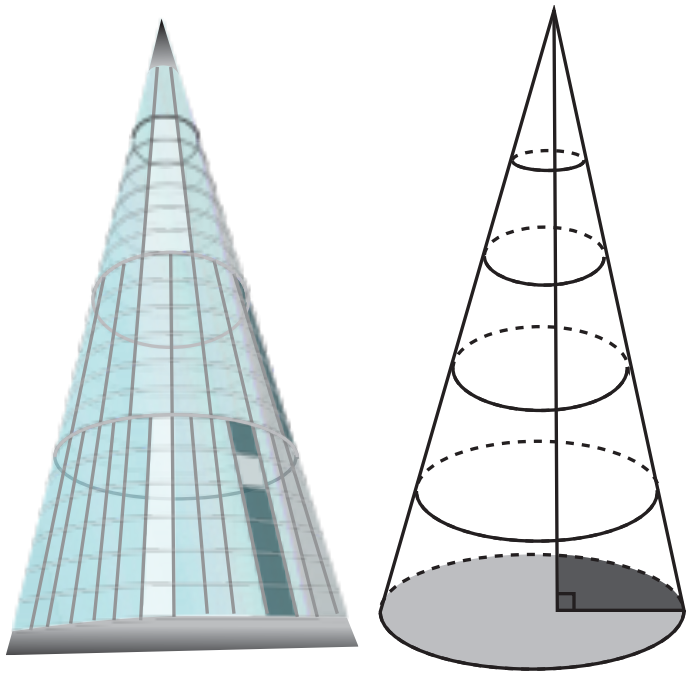
7. Tehtävässä 4 olevaa pylvästä voidaan pitää ympyräpohjaisen lieriön muotoisena. Remontoitavassa tilassa kuvan mukaisia pylväitä on 20 kpl. Kuinka paljon maalia tarvitaan näiden maalaamiseen, jos lieriöistä maalataan pelkästään niiden vaippa? Maalipurkissa on merkintä 7 m^2/litra.

8. Kuvan neliöpohjaisen pyramidin sivutahkojen yhteenlaskettu pinta-ala on noin 6900 m^2. Laske pyramidin tilavuus.



9. Työmaalle johtavalle 4 metriä leveälle soratielle tuodaan 28 m^3 soraa. Soraa levitetään 10 cm paksu kerros tien päälle. Laske, kuinka pitkän pätkän tietä tällä soramäärällä saa katetuksi. Voit olettaa, että syntyvä sorakate on suorakulmaisen särmiön muotoinen.

10. Museon pihalle rakennetaan ympyräkartion muotoinen lasiseinäinen rakennelma. Kuinka monta neliömetriä lasia tarvitaan, jos rakennelman korkeus on 22,0 metriä ja pohjaympyrän halkaisija on 9,8 metriä? *(Vihje: Laske vaipan sivujanan pituus Pythagoraan lauseen avulla.)*

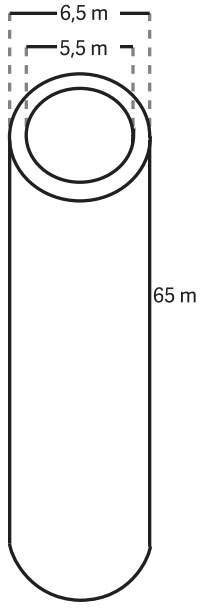


11. Johda

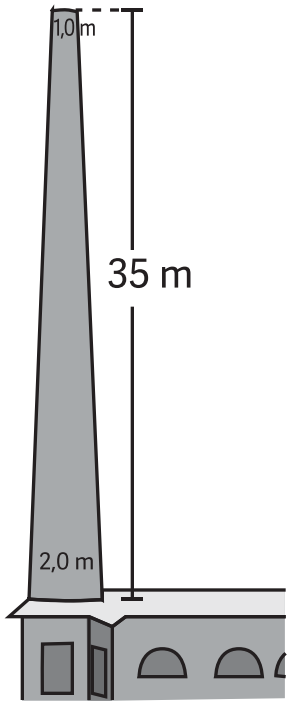
a) sylinterin tilavuuden laskukaava $V = \pi r^2 h$

b) sylinterin vaipan pinta-alan laskukaava $A_v = 2\pi rh$. *(Vihje: Rullaa esim. A4-kokoinen paperi rullalle ja mieti ympyrän- ja suorakulmion laskukaavojen avulla seuraavaa askelta.)*

12. Kuinka monta kuutiometriä betonia tarvitaan kuvan mukaisen savupiipun valmistukseen? *(Vihje: Tarkastele savupiippua suoran ympyrälieriön muotoisena kappaleena. Laske sylinterin tilavuus ja vähennä siitä onton sisäosan tilavuus.*

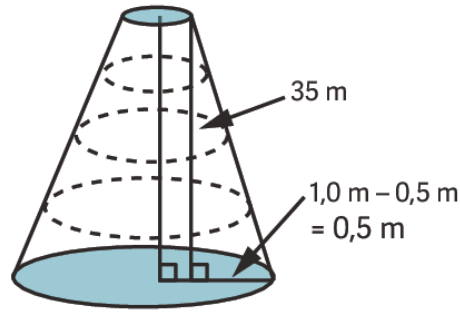


13. Laske kuvan savupiipun ulkotilavuus. *(Vihje: Tarkastele kuvan piippua umpinaisena katkaistuna ympyräpohjaisena suorana kartiona.)*



14. Edellisen tehtävän savupiipun sisässä kulkee suoran ympyräpohjaisen lieriön muotoinen ontto reikä, jonka halkaisija on 45 cm. Savupiippu on rakennettu suorakulmaisen särmiön muotoisista tiilistä, joiden mitat ovat 270 mm x 130 mm x 75 mm. Yhden tiilen massa on 4,1 kg (mukaan on laskettu muurauslaasti). Laske, kuinka monta kilogrammaa torni painaa. Anna tulos satojen kilogrammojen tarkkuudella.

15. Etsi tietolähteistä, millä kaavalla lasketaan katkaistun ympyräpohjaisen suoran kartion pinta-ala. Laske sen perusteella tehtävän 13 savupiipun vaipan pinta-ala.

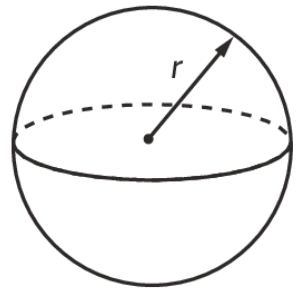


Pallon tilavuus ja pinta-ala

Pallon tilavuus saadaan kaavalla $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Pallon pinta-ala taas saadaan kaavalla $A = 4\pi r^2$.

Vastaavasti puolipallon tilavuus ja pinta-ala saadaan puolittamalla kokonaisen pallon pinta-ala ja tilavuus.

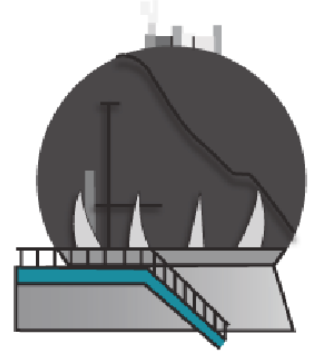


Esimerkki

Paineistettua nestemäistä kaasua varastoidaan pallon muotoisessa astiassa. Laske

a) astian tilavuus litroina, kun sen sisähalkaisija on 38,0 metriä

b) astian ulkopinta-ala neliömetreinä, kun sen ulkohalkaisija on 38,4 metriä.



Ratkaisu:

a) Pallon tilavuus saadaan kaavalla $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot (19{,}0\,\text{m})^3$$

$V \approx 28\,730{,}91\ \text{m}^3$

$V \approx 287\,300\,000$ litraa

b) Pallon pinta-ala saadaan kaavalla

$A = 4\pi r^2$

$A = 4\pi r \cdot (19{,}2\ \text{m})^2$

$A = 4\,632{,}47\ \text{m}^2$

$A \approx 4\,630\ \text{m}^2$

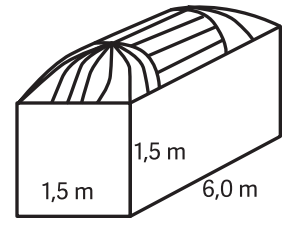
Vastaus: Tilavuus on noin 28 700 000 litraa ja pinta-ala noin 4 630 m^2.

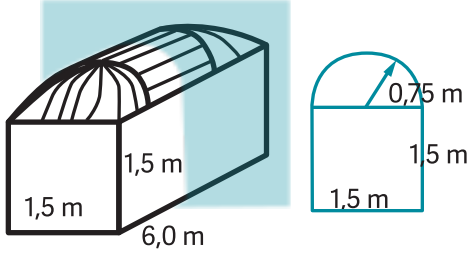
Sekalaisia kappaleita

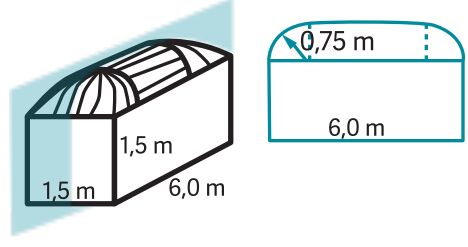
Ylivoimaisesti suurin osa kappaleista ei ole puhtaasti mikään kolmesta edellä esitellystä kappaleesta (lieriö, kartio ja pallo). Usein kappale voidaan kuitenkin pilkkoa osiin, joiden tilavuus ja pinta-ala on helpompi laskea.

Esimerkki

Työmaalle tuodaan soraa konteissa, joiden leveys on 1,5 m, korkeus 1,5 m ja pituus 6,0 m. Kontti lastataan aluksi piripintaan. Tämän jälkeen lisätty sora asettuu keskeltä puoliympyräpohjaisen lieriön muotoon. Kontin päihin syntyy pallonmuotoinen pinta. Oheisissa kuvissa esitetään sorakuorman leikkauskuviot. Laske, kuinka monta kuutiometriä kuormassa on soraa.

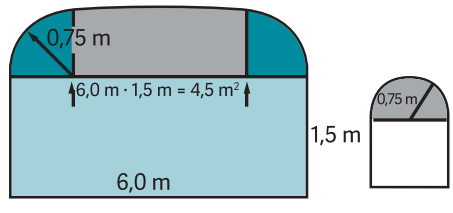






Ratkaisu:

Jaetaan kuorma kolmeen osaan:



1. Suorakulmaisen särmiön muotoinen osa (kuvassa vaalean vihreällä)

$V_1 = 6{,}0\ \text{m} \cdot 1{,}5\ \text{m} \cdot 1{,}5\ \text{m} = 13{,}5\ \text{m}^3$.

2. Puoliympyräpohjaisen suoran lieriön muotoinen osa (kuvassa harmaalla)

$V_2 = A_2 h_2$

$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (0{,}75\ \text{m})^2 \cdot 4{,}5\ \text{m} \approx 3{,}976\ \text{m}^3$.

3. Kaksi puolipallon puolikasta (kuvassa tumman vihreällä). Yhteensä siis puolipallon muotoinen kappale.

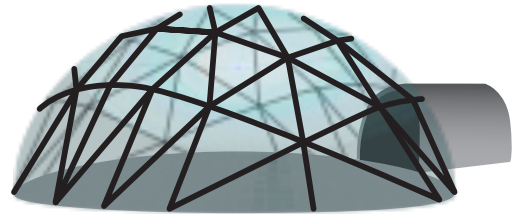
$$V_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}75\,\text{m})^3 \approx 0{,}884\,\text{m}^3$$

Yhteistilavuus on siis: $13{,}5\ \text{m}^3 + 3{,}976\ \text{m}^3 + 0{,}884\ \text{m}^3 = 18{,}360\text{m}^3$

Vastaus: Noin $18{,}4\ \text{m}^3$

Tehtäviä

1. Laske puolipallon muotoisen lasirakennuksen lasipinta-ala, kun rakennuksen pohjan halkaisija on 3,5 metriä.



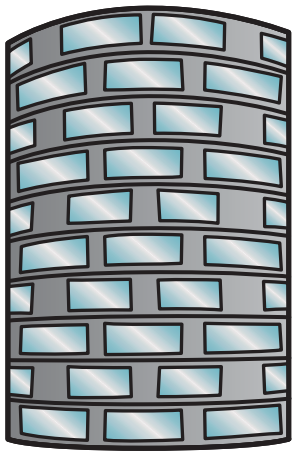
2. Olet ostamassa käytettyä kompressoria. Myyjä ei tiedä kompressorin tilavuutta mutta kertoo viestissä sinulle kompressorin mitat: ”Kompressori koostuu sylinterinmuotoisesta kappaleesta, jonka päissä on puolipallon muotoinen kappale. Sylinteriosan pituus noin 50 cm, ja poikkileikkauksen halkaisija on noin 30 cm.”

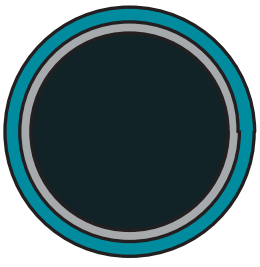
Vastaavia kompressoreita selanneena uskot, että kompressorin tilavuus on 40, 50 tai 60 litraa. Laske, mikä näistä tilavuuksista on oikea. (Voit olettaa, että teräskuori on niin ohut, ettei sitä tarvitse huomioida laskuissa.)

3. Etsi Avaruusgeometria-osiosta tärkeät kaavat alla olevaan työmaakopin huoneentauluun. Piirrä myös jokaiseen kohtaan kyseinen avaruuskappale ja merkitse siihen, mitä kaavassa olevilla kirjaimilla tarkoitetaan.

Lieriön tilavuus $V_{\text{lieriö}} =$	Suorakulmaisen särmiön tilavuus $V_{\text{suorakulmainen särmiö}} =$	Ympyräpohjaisen lieriön tai kartion pohjan pinta-ala $A_{\text{ympyrä}} =$
Kartion tilavuus $V_{\text{kartio}} =$	Ympyräpohjaisen lieriön tilavuus $V_{\text{ympyräpohjainen lieriö}} =$	Ympyräpohjaisen (suoran) lieriön vaipan pinta-ala $A_v =$
Pallon tilavuus $V_{\text{pallo}} =$	Pallon pinta-ala $A_{\text{pallo}} =$	Ympyräpohjaisen (suoran) kartion vaipan pinta-ala $A_v =$

4. 👣👣👣 Kuvassa on kymmenkerroksinen pohjaltaan ympyränmuotoinen kerrostalo, jonka jokaisessa kerroksessa on kaksikymmentä ikkunaa. Jokaisen ikkunan leveys on 140 cm ja korkeus 120 cm. Talon ulkohalkaisija on 15,0 metriä. Huonekorkeus on 2,5 m. Seinän läpileikkaus on seuraava: uloimpana on yhteensä 20 cm paksu eriste- ja pintakuviointikerros. Seuraava kerros on 15 cm paksu betonikerros. Jokaisen huoneiston lattiassa on 20 cm paksu betonikerros, joka on siis samalla alapuolisen kerroksen katto.





Laske,

a) kuinka suuri kerrosta kohden on pinta-ala, joka jää ulkoseinien sisäpuolelle *(kuvassa tummimman alueen pinta-ala)*

b) mikä on rakennuksen korkeus

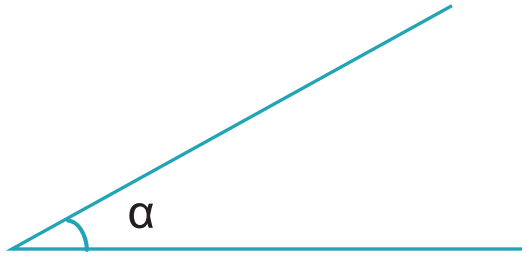
c) kuinka monta kuutiometriä betonia kuluu kymmenen kerroksen rakentamiseen.
(Vihje: Huomioi, että vaakasuoria betonitasoja valetaan 11 kappaletta eikä 10.)

Kulmien suuruudet

Rakennusalalla olet jatkuvasti tekemisissä erisuuruisten kulmien kanssa. Palauta aluksi mieleesi kulmien luokittelu. Kulmat nimetään yleensä pienillä kreikkalaisilla kirjaimilla.

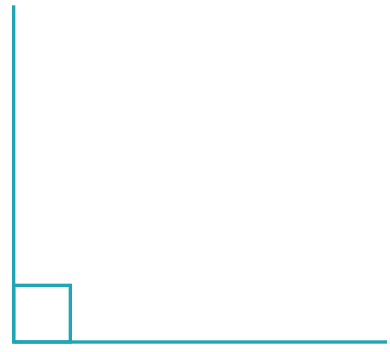
Terävä kulma

Kulma on terävä, kun sen suuruus on $0 < \alpha < 90°$.



Suora kulma

Kulma on suora, kun sen suuruus on tasan 90°.



Tylppä kulma

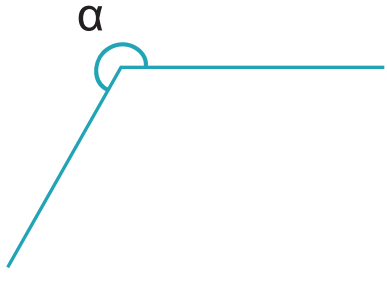
Kulma on tylppä, kun sen suuruus on $90° < \alpha < 180°$.

Oikokulma

Oikokulma on tasan 180°.

Kupera kulma

Kulma on kupera, kun sen suuruus on $180° < \alpha\, 360°$.



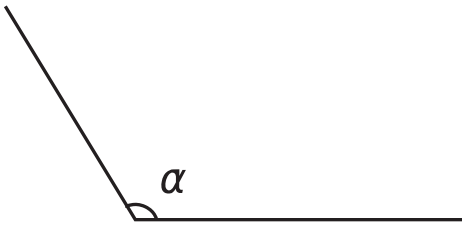
Täysi kulma

Täysi kulma on tasan 360°.

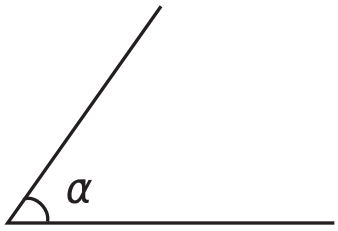
Tehtäviä

1. Arvioi ensin kulman suuruus. Tarkista sitten tulos astelevyllä mittaamalla.

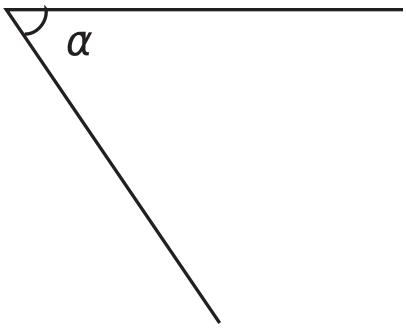
a)



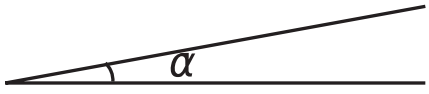
c)



b)



d)



2. Piirrä vihkoosi astelevyllä seuraavat kulmat:

a) 30°, b) 110°, c) 220°, d) 65°, e) 170°, f) 340°

3. Vastaa seuraaviin kysymyksiin:

a) Lumilautailija tekee "tonnikasikympin" eli pyörähtää 1 080 astetta. Kuinka monta pyörähdystä hän tekee?

b) Timpuri rentoutuu töiden jälkeen suunnistamalla. Aluksi hän etenee suoraan etelään, mutta yhtäkkiä hän päättää kääntyä kulkusuunnastaan 270 astetta vasemmalle. Mihin ilmansuuntaan hän on suuntaamassa?

4. Kellon viisarit piirtävät kulmia jatkuvasti. Mieti seuraavia kysymyksiä.

a) Kuinka monta astetta kellon minuuttiviisari etenee yhdessä tunnissa?

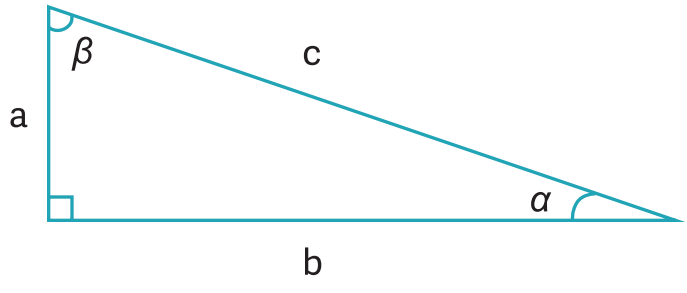
b) Tuntiviisari eteni 70 astetta. Kuinka monta minuuttia siihen kului?

5. Harpilla ja viivaimella pystyy piirtämään säännöllisen kuusikulmion. Ota internetistä selvää, kuinka se tapahtuu, ja piirrä vihkoosi säännöllinen kuusikulmio, jonka sivun pituus on 3 cm. Kuusikulmiorakennetta esiintyy silloin tällöin myös rakentamisessa. Missä olet törmännyt kuvioon?

Trigonometria

Trigonometria-sana muodostuu sanoista ”tri”, ”gono” ja ”metria”. Vapaasti suomennettuna nämä sanat merkitsevät kolmikulmamittausta. Trigonometristen funktioiden avulla voit ratkaista kolmioista niiden sivuja ja kulmia matemaattisesti. Rakennusalalla kulmien laskua voi tulla eteen vaikkapa luiskien valussa tai lapekulman määrittämisessä.

Tärkeän kolmen koplan muodostavat tangentti-, sini- ja kosinifunktiot, jotka määritellään suorakulmaisen kolmion kautta. Muistathan, mitä merkitsivät kateetti ja hypotenuusa? Voit täydentää ne alla olevaan kolmioon.



Tangentti

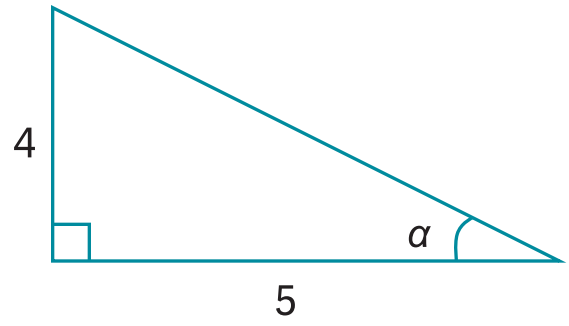
Suorakulmaisessa kolmiossa kulman α vastaisen ja vierekkäisen kateetin suhdetta sanotaan kulman *tangentiksi*:

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{vastakkainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}}$$

Kulmaa laskiessasi sinun täytyy ottaa laskimesta tangentin käänteisfunktio kateettien suhteesta. Tämä tehdään laskimittain inv-, 2ndf- tai shift-näppäimen kautta. Muista myös asettaa laskimestasi asteet (DEG) käyttöön!

Esimerkki 1

Määritä oheisesta kolmiosta kulma α.



Ratkaisu:

Muodostetaan yhtälö kulman α tangentille:

$$\tan\alpha = \frac{4}{5}.$$

Ratkaistaan kulma α laskimella ja pyöristetään vastaus:

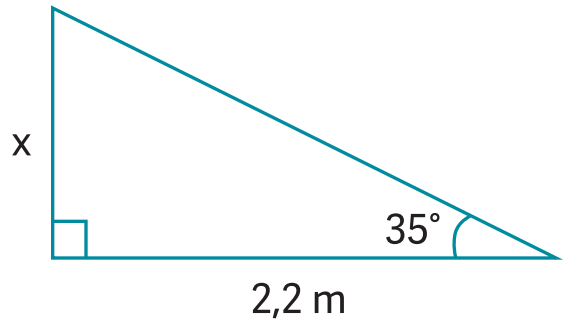
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = 38{,}659...^\circ \approx 38{,}7^\circ.$$

Asia ei siis ole erityisen vaikeaa, mutta usein vaikeuksia aiheuttaa laskimen tekninen käyttö. Kysy neuvoa opettajaltasi!

Jos kulma on tiedossa mutta sivun pituus ei, se voidaan helposti laskea yhtälönratkaisua soveltamalla.

Esimerkki 2

Määritä kolmiosta kateetin pituus.



Ratkaisu:

Muodostetaan jälleen yhtälö:

$$\tan 35^\circ = \frac{x}{2{,}2\ \text{m}}.$$

josta molemmat puolet kertomalla 2,2 m:llä saadaan

$x = \tan 35^\circ \cdot 2{,}2\ \text{m} = 1{,}540...\ \text{m} \approx 1{,}5\ \text{m}.$

Kateetin pituus on noin 1,5 metriä.

Huomaa, että nyt tangentista ei oteta käänteisfunktiota vaan 35 asteesta lasketaan tangenttifunktion arvo. Pitää olla jatkuvasti tietoinen siitä, onko laskemassa kulmaa vai tangenttifunktion arvoa jollain kulmalla.

Kosini ja sini

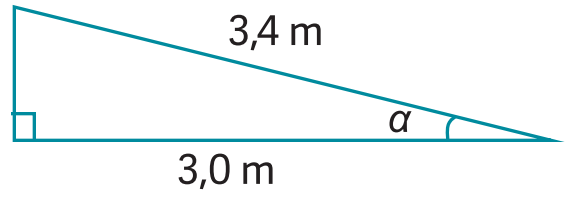
Kosini- ja sinifunktioiden käyttö on periaatteeltaan sama kuin tangentissakin – nyt vain vertaillaan eri sivujen suhteita. Pienet kirjaimet *a*, *b* ja *c* viittaavat sivun 160 mallikuvaan. Määritellään funktiot sini ja kosini:

$$\cos\alpha = \frac{\text{viereinen kateetti}}{\text{hypotenuusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{viereinen kateetti}}{\text{hypotenuusa}} = \frac{a}{c}$$

Esimerkki

Määritä oheisen luiskan kulma:



Ratkaisu:

Koska kolmiosta on tiedossa kulman viereinen kateetti ja hypotenuusa, on käytettävä kosinifunktiota:

$$\cos\alpha = \frac{3{,}0\text{ m}}{3{,}4\text{ m}},$$

josta laskimella näppäilemällä saadaan kulmaksi

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{3{,}4}\right) = 28{,}072...^\circ \approx 28^\circ.$$

Luiskan kulma on siis noin 28 astetta.

Tehtäviä

1. Laske kulmien arvo asteen tarkkuudella.

a) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) =$ _____

b) $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{15}{23}\right) =$ _____

c) $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) =$ _____

d) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{16}{0{,}3}\right) =$ _____

e) $\alpha = \sin^{-1}(0{,}5) =$ _____

f) $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4{,}2}{5{,}3}\right) =$ _____

2. Laske trigonometrisen funktion arvo kymmenesosan tarkkuudella.

a) tan(30°) = _____

b) cos(30°) = _____

c) sin(30°) = _____

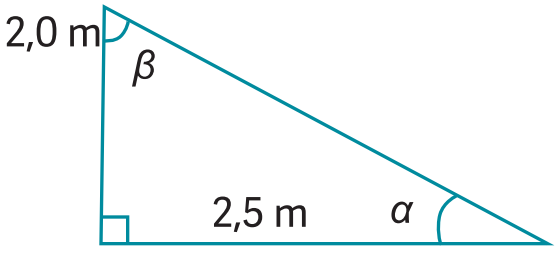
d) sin(89°) = _____

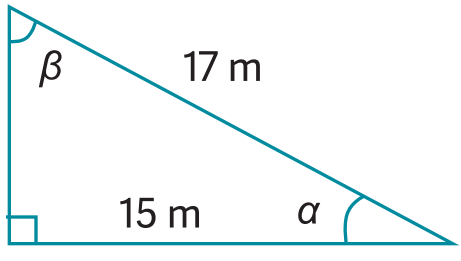
e) cos(13°) = _____

f) cos(179°) = _____

3. Piirrä viivoittimella luiska, jonka kaltevuus on 1 : 8. Mitat voit valita itse. Vertaa piirrosta kaverisi kanssa.

4. Määritä oheisista kolmioista kulmat alfa ja beeta asteen kymmesosan tarkkuudella.





_____

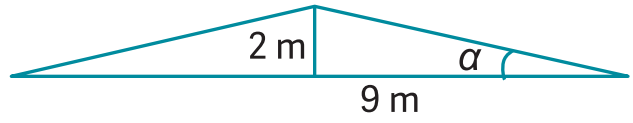
_____

5. Määritä suorakulmaisen kolmion kulmat asteen tarkkuudella seuraavissa tapauksissa:

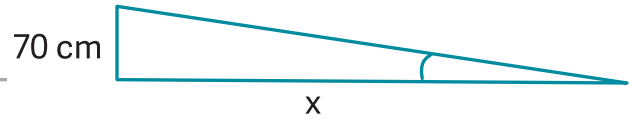
a) Kateettien pituudet ovat 20 cm ja 80 cm.

b) Toisen kateetin pituus on 58 cm, ja hypotenuusan pituus on 60 cm.

6. Kattotuoli on kuvan mukainen (ristikot on jätetty pois selvyyden takia). Kuinka jyrkäksi muodostuu lapekulma α ?



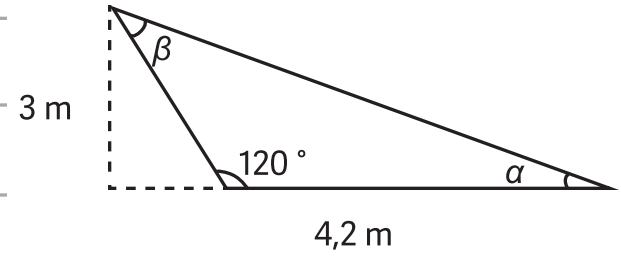
7. Luiskan kaltevuus oli piirustuksessa 8 astetta. Jos luiskan korkeus on 70 cm, kuinka pitkäksi luiska muodostuu?



8. Eräässä uudisrakennuskohteessa valettiin luiska, jonka kaltevuus ilmoitettiin suhdelukuna 1 : 14. Kuinka monta astetta kaltevuus tällöin oli?

9. Pihatöissä tulee muistaa, että pihapinnan tulee kallistua noin 2 % rakennuksesta poispäin. Kuinka paljon tämä on asteina ilmaistuna?

10. Laske oheisen kolmion pinta-ala ja kulmien α ja β suuruudet.



5

Yhtälöt

- Yhtälötyypit
- Suoraan ja kääntäen verrannollisuus
- Funktiot ja kuvaajat

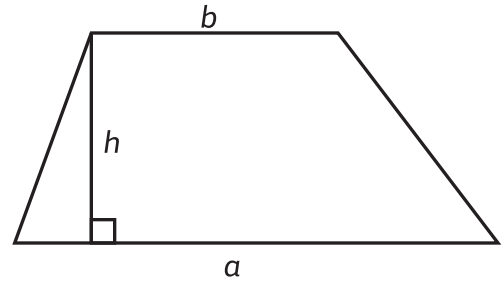
Rakennusalalla esiintyy paljon yhtälöitä: Pythagoraan lause ja muut geometrian laskukaavat ovat vain pieni osa siitä valtavasta yhtälömäärästä, johon rakentaja törmää. Yhteistä yhtälöille on se, että niissä on yhtäsuuruusmerkki, joka jakaa yhtälön kahteen yhtä suureen osaan.

Kaavaan sijoittaminen

Moniin rakennusalalla esiintyviin matemaattisiin riippuvuuksiin on johdettu valmis kaava, joka on löydettävissä tietolähteistä. Esimerkiksi puolisuunnikkaan pinta-ala saadaan kaavalla $A = \frac{a + b}{2} \cdot h$.

Pinta-alan laskemiseksi kirjaimien a, b ja h paikalle tulee sijoittaa niitä vastaavat luvut.

Usein rakentajalle riittää, että hän osaa etsiä tai mitata olennaiset luvut ja sijoittaa ne kaavaan.



Esimerkki

Ratkaise A:n suuruus kaavasta $A = \frac{a + b}{2} \cdot h$, kun $a = 80$, $b = 50$ ja $h = 30$.

Ratkaisu: Sijoitetaan kirjaimia vastaavat luvut yhtälöön:

$$A = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

$$A = \frac{80 + 50}{2} \cdot 30$$

$$A = 1\,950$$

Vastaus: $A = 1\,950$

Tekijämuotoinen yhtälö ja verranto

Tilan säästämiseksi yhtälöistä esitetään yleensä vain yksi muoto. Puolisuunnikkaan pinta-alan kaava on geometrian kaavakokoelmissa lähes aina sellaisessa muodossa, jossa A on ratkaistu eli se on ”yksinään” toisella puolella yhtäsuuruusmerkkiä. Jos yhtälöstä halutaan ratkaista jonkin muu kirjain, se pitää muuntaa erilaiseen muotoon.

Tekijämuotoisessa yhtälössä on ainoastaan kerto- ja jakolaskuja. Jos tekijämuotoisessa yhtälössä on jakolasku, yhtälö voidaan helposti täydentää verrannoksi. Huomattava osa rakennusalan yhtälöistä on tekijämuotoisia. Siksi niiden ratkaisuprosessiin kiinnitetään erityisen suurta huomiota.

Tekijämuotoisia yhtälöitä on periaatteessa kolmea eri tyyppiä:

Yhtälötyyppi 1	Yhtälötyyppi 2	Yhtälötyyppi 3a	Yhtälötyyppi 3b
$4x = 0{,}9$	$\frac{3}{4} = \frac{2x}{2{,}1}$	$1{,}5 = \frac{x}{3}$	$1{,}2 = \frac{2}{x}$

Yhtälötyypin 1 ratkaiseminen

Jos yhtälössä on ainoastaan kertolaskuja, se ratkaistaan seuraavalla tavalla:

1. Käännetään yhtälö niin päin, että muuttuja on yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella.

2. Jaetaan yhtälön vasen ja oikea puoli muuttujan kertojalla.

Esimerkki

Ratkaise U.

a) $4\,000 = U \cdot 12$

$U \cdot 12 = 4\,000 \quad || : 12$

$U = 333{,}3...$

$U \approx 330$

b) $P = U \cdot I$

$U \cdot I = P \quad || : I$

$U = \frac{P}{I}$

Yhtälötyypin 2 eli verrannon ratkaiseminen

Jos yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla on jakolasku, yhtälötyyppiä kutsutaan verrannoksi. Verranto ratkaistaan kertomalla yhtälö ristiin.

Esimerkki

Ratkaise f.

a) $\frac{5{,}3}{4} = \frac{1{,}6}{f}$

$\frac{5{,}3}{4} \times \frac{1{,}6}{f}$

$5{,}3f = 4 \cdot 1{,}6$

$5{,}3f = 6{,}4 \quad || : 5{,}3$

$f \approx 1{,}21$

b) $\frac{7}{x} = \frac{f}{a}$

$\frac{7}{x} \times \frac{f}{a}$

$f = \frac{7 \cdot a}{x}$

Yhtälötyyppien 3a ja 3b ratkaiseminen

Jos yhtäsuuruusmerkin toisella puolella on jakolasku mutta toisella puolella ei, yhtälö saadaan palautetuksi tyypin 2 yhtälöksi, kun lisätään toiselle puolelle nimittäjäksi luku 1.

Esimerkki

Ratkaise R.

a) $3{,}5 = \frac{2}{R}$

$\frac{3{,}5}{1} = \frac{2}{R}$

$3{,}5R = 1 \cdot 2$

$3{,}5R = 2 \quad || : 3{,}5$

$R \approx 0{,}57$

b) $\frac{U}{R} = I$

$\frac{U}{R} = \frac{I}{1}$

$R \cdot I = U \quad || : I$

$R = \frac{U}{I}$

Tehtäviä

1. Ratkaise U kaavasta $U = \frac{P}{I}$, kun $P = 1\,000$ ja $I = 10$.

2. Momentti lasketaan kaavalla $M = F \cdot a$. Kaava saadaan myös muotoihin $a = \frac{M}{F}$ ja $F = \frac{M}{a}$.

Kaavoissa M = momentti (newtonmetri, Nm)

F = voima (yksikkö newton, N)

a = voiman varsi (yksikkö: metri, m).

a) Ratkaise M, kun $F = 1\,000$ ja $a = 0{,}3$. (*Vihje: Käytä kolmesta tehtävänannon kaavasta sitä, jossa M on valmiiksi ratkaistu.*)

b) Ratkaise F, kun $a = 0{,}2$ ja $M = 30$.

3. Ratkaise x seuraavista yhtälöistä. Jos tuloksena on pitkä desimaaliluku, pyöristä se kahden desimaalin tarkkuuteen.

a) $35x = 280$ b) $3 \cdot 5 = 4 \cdot x$ c) $5 = 0{,}03x$

4. Ratkaise x seuraavista yhtälöistä. Jos tuloksena on pitkä desimaaliluku, pyöristä se kahden desimaalin tarkkuuteen.

a) $\frac{3}{x} = \frac{5}{2}$

b) $\frac{x}{4{,}5} = 3$

c) $0{,}06 = \frac{1{,}2}{2{,}2x}$

5. Ratkaise x seuraavista yhtälöistä.

a) $a \cdot x = r$

b) $\frac{x}{r} = s$

c) $\frac{1}{f} = \frac{1}{2x}$

6. Kartion tilavuus saadaan selville kaavan $V = \frac{A_p h}{3}$ avulla.

a) Ratkaise h kaavasta.

b) Kuinka suuri h on, kun $V = 3\,200\ \text{m}^3$ ja $A_p = 430\ \text{m}^2$?

7. Ratkaise kahden desimaalin tarkkuudella V kaavasta $V = \frac{h(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2)}{3}$, kun $h = 6$, $A_1 = 5$ ja $A_2 = 3$.

8. Tiheys lasketaan kaavalla $\rho = \frac{m}{V}$, missä ρ on tiheys (yksikössä kg/m^3), m = massa (kg) ja V = tilavuus (m^3). Suorakulmaisen särmiön tilavuus voidaan laskea kaavalla $V = Ah$, missä A on särmiön pohjan pinta-ala ja h on sen korkeus.

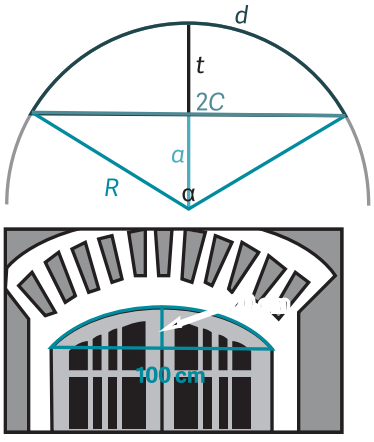
a) Millä kaavalla saadaan tietää suorakulmaisen särmiön massa, kun tiedetään sen pohjan pinta-ala, korkeus ja sen tiheys?

b) Lähes vaakasuoralla katolla on lunta. Lumen tiheys on noin 250 kg/m^3. Kuinka suuri massa on sellaisella lumimäärällä, jonka pinta-ala on 1 m^2 ja korkeus 46 cm?

9. Kaari on osa ympyrän kehää. Kaarevuussäde R saadaan lasketuksi kaavan $R = \frac{C^2}{8 \cdot t} + \frac{t}{2}$ avulla. Oheiseen kuvaan on piirretty, mitä milläkin kirjaimella tarkoitetaan.

Rakennustyömaalle tulleesta teräskuormasta puuttui kuvan ikkunoiden yläosassa olevat kaarevat harjateräksen palat. Teräksistä tehdään uusi tilaus, jota varten pitää tietää kaarevuussäde R.

Laske kaarevuussäde. *Huomaa, että C ei ole 100 cm.*



10. Lämpötilan muuttuessa kappaleen pituus muuttuu. Pituuden muutos saadaan selville yhtälön $\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L_0$ avulla.

Kaavassa esiintyvien kirjainten merkitykset ovat seuraavat: α *on pituuden lämpölaajenemiskerroin,* ΔL *on pituuden muutos,* ΔT *on lämpötilan muutos ja* L_0 *on alkuperäinen pituus.*

a) Kuinka paljon 1 km:n pituinen rautatiekisko pitenee, jos lämpötila kasvaa 75 °C. Raudalle $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ (yksikkö 1/°C).

b) Kuinka paljon lämpötilan olisi noustava, jotta 1 200,0 mm:n pituinen pala alumiinia kasvaisi 2,0 mm? Alumiinille $\alpha = 23 \cdot 110^{-6}$ (yksikkö 1/°C).

Suoraan ja kääntäen verrannollisuus

Verranto on yhtälö, jossa kaksi suhdetta ovat yhtä suuret. Verranto voidaan ratkaista ristiin kertomalla.

Verrantoa voidaan käyttää joidenkin käytännön ongelmien ratkaisussa, kun kaksi suuretta muuttuvat toisiinsa nähden samassa suhteessa. Tällaiset ongelmat voidaan jakaa suoraan ja kääntäen verrannollisiin.

Suoraan verrannollisuus

Kun kaksi suuretta kasvavat tai pienenevät samassa suhteessa, kyseessä on suoraan verrannollisuus. Tällöin toisen suureen kaksinkertaistuessa myös toinen kaksinkertaistuu.

Esimerkki

3 kuutiometriä puutavaraa painaa 1 500 kg. Kuinka paljon painaa 5 kuutiometriä samaa puutavaraa?

Ratkaisu:

Kyseessä on suoraan verrannollisuus, koska puutavaran tilavuuden kasvaessa kasvaa myös sen paino. Verrannon muodostusta helpottamaan voidaan tehdä taulukko:

m^3	kg
3	1 500
5	x

Ratkaistaan verranto: $\frac{3}{5} = \frac{1\,500}{x}$

$3x = 5 \cdot 1\,500$

$3x = 7\,500$

$x = 7\,500 : 3$

$x = 2\,500$ kg

Vastaus: 5 kuutiometriä painaa 2 500 kg.

Kääntäen verrannollisuus

Kun toisen suureen kasvaessa toinen pienenee samassa suhteessa, kyseessä on kääntäen verrannollisuus. Tällöin toisen suureen kaksinkertaistuessa toinen puolittuu.

Esimerkki

Hirsimökkitehtaalta sanotaan, että hirsikehikon pystyttämiseen kuluu 4 kirvesmieheltä 16 tuntia. Jos kirvesmiehiä onkin vain 3, kuinka kauan hirsikehikon pystyttämiseen kuluu? Oletetaan, että kaikkien kirvesmiesten työteho on sama.

Ratkaisu:

Kyseessä on kääntäen verrannollisuus, koska kirvesmiesten määrän vähetessä työhön kuluva aika kasvaa.

Kirvesmiesten lkm	Aika, h
4	16
3	x

Koska kyseessä on kääntäen verrannollisuus, toinen ylläolevista suhteista on käännettävä ylösalaisin (tässä tapauksessa jälkimmäinen): $\frac{4}{3} = \frac{x}{16}$

$3x = 4 \cdot 16$

$3x = 64$

$x = 64 : 3$

$x = 21{,}33$ h

Vastaus: Hirsikehikon pystyttämiseen kuluu 21,3 h.

Tehtäviä

1. Ratkaise x.

a) $\frac{12}{x} = \frac{3}{4}$

b) $\frac{x}{15} = \frac{3}{45}$

c) $\frac{122}{4} = \frac{x}{68}$

d) $\frac{5}{7} = \frac{20}{x}$

2. Ovatko seuraavat suureet suoraan vai kääntäen verrannollisia?

a) Pöytälevyn paksuus ja massa (pinta-ala on vakio)

b) Naulojen yhteispaino ja lukumäärä

c) Kappaleen tilavuus ja paino (tiheys on vakio)

d) Nopeus ja aika (matka on vakio)

e) Lattiaan tarvittavien laattojen lukumäärä ja lattian pinta-ala (laatan koko on vakio)

f) Säiliön täyttämiseen tarvittava aika ja pumpusta virtaavan veden määrä (l/min)

3. Kun valmistetaan 100 kg betonia, tarvitaan 17 kg sementtiä. Loppu betonin painosta on hiekkaa. Kuinka paljon tarvitaan sementtiä, jos valmista betonia tarvitaan 15 kg?

4. Lattiaan tarvitaan 1 200 juoksumetriä 100 mm:n levyisiä lautoja. Kuinka monta juoksumetriä lautaa tarvittaisiin, jos se tehtäisiin 150 mm leveistä laudoista?

5. Teräsbetonipalkin pituus muuttuu lämpötilan muuttuessa. Jos lämpötila muuttuu 100 °C, viiden metrin pituisen teräsbetonipalkin pituus muuttuu 0,6 mm. Kuinka monta millimetriä muutos voi olla suomalaisissa lämpötilaoloissa (–40–+40 °C) kyseiselle teräsbetonipalkille? (Lämpötilan kasvaessa palkin pituus kasvaa samassa suhteessa.)

---

6. Kirvesmies saa urakasta 500 €, jos hän tekee sen valmiiksi 20 tunnissa. Jos taas hän saa urakan valmiiksi nopeammin, hän saa palkkion, joka on kääntäen verrannollinen sovittuun palkkioon. Kuinka suuri on kirvesmiehen palkkio, jos urakka tulee valmiiksi 16 tunnissa?

---

7. Soraa tilattiin 5 kuormaa, kun oletettiin, että kuormaan mahtuu 4 m^3 soraa. Kuormaan mahtuikin vain 3 m^3 soraa. Kuinka monta kuormallista sitä nyt on tuotava?

---

8. Seinän tapetointiin tarvitaan 50 metriä tapettia, kun tapettirullan leveys on 1,2 metriä. Jos tapettirullan leveys onkin 1,5 m, kuinka monta metriä tapettia tarvitaan?

---

9 Automatkaan Oulusta Helsinkiin kuluu 8 tuntia, kun autoilija ajaa 90 km/h:n keskinopeudella. Kuinka kauan häneltä kuluu matkaan aikaa, kun keskinopeus onkin 85 km/h?

---

10. Opiskelijoiden kevätretkelle ilmoittautui 42 opiskelijaa. Bussimatkan hinta olisi tällöin ollut 8,50 €/hlö. Lopulta opiskelijoista vain 36 lähtee retkelle. Mikä tulee tällöin yhden opiskelijan hinnaksi? (Yhteishinta pysyi alkuperäisenä.)

---

11. Puukuorman halkomiseen kuluu 2 ihmiseltä 12 h. Kuinka kauan kyseisen kuorman halkomiseen kuluu, jos mukana on 3 ihmistä?

---

12. 40 pinokuutiometriä vastaa 24:ää kiintokuutiometriä. Kuinka monta kiintokuutiometriä on 15 pinokuutiometriä?

---

13. Vesisäiliö täyttyy 45 minuutissa, kun pumpusta tulee vettä 165 l/min. Jos pumpusta tulisi vettä 200 l/min, kuinka kauan säiliön täyttäminen kestäisi?

---

14. Työmatkaan autolla kuluu 20 min, kun keskinopeus on 40 km/h. Kuinka monta minuuttia aiemmin on lähdettävä töihin, jos työmatkan ajaa polkupyörällä keskinopeudella 17 km/h.

---

15. Lauta on tarkoitus katkaista suhteessa 2 : 3. Kuinka pitkä laudan pidempi osa on, kun lyhyempi on 55 cm?

---

16. Kaivossa on 1 250 litraa vettä, kun se on täynnä. Tällöin vedenpinta on 0,5 metriä kaivon yläreunasta. Kuinka monta litraa kaivossa on vettä, kun vedenpinnan etäisyys kaivon yläreunasta on 1,7 metriä?

Muut ensimmäisen asteen yhtälöt

Kaikki yhtälöt eivät ole tekijämuotoisia yhtälöitä. Esimerkiksi $3 + 2x = x + 9$ ei ole tekijämuotoinen eikä sitä saada ratkaistuksi pelkillä jako- tai kertolaskuilla.

Usein et edes huomaa ratkaisevasi ensimmäisen asteen yhtälöitä. Jos eteesi tulisi tilanne, jossa sinulla on 25 euroa rahaa, jolla pitää ostaa kaupasta kaksi kappaletta 2,5 euroa maksavia teippirullia ja lopuilla rahoilla 6 euroa maksavia kumihansikkaita, pystyt ratkaisemaan kaupasta saatavien kumihansikkaiden määrän myös ilman yhtälöitä.

Yhtälön ratkaisun voikin usein kiertää kokeilemalla tuntemattoman paikalle eri lukuja. Ensimmäisen asteen – ei tekijämuotoisen – yhtälön ratkaisutaitoa tarvitaan kuitenkin esimerkiksi Pythagoraan lauseen avulla saatavien yhtälöiden ratkaisemisessa.

Esimerkki

Päättele, mikä on yhtälön $4x + 1 = 11$ ratkaisu. Perustele ratkaisu sijoittamalla vastaus muuttujan paikalle. *Tämän vaiheen voi tehdä myös päässä.*

Ratkaisu: Kokeillaan muuttujan x paikalle eri lukuja.

Jos $x = 0$, vasemmaksi puoleksi saadaan $4 \cdot 0 + 1 = 1$

Jos $x = 1$, vasemmaksi puoleksi saadaan $4 \cdot 1 + 1 = 5$

Jos $x = 2$, vasemmaksi puoleksi saadaan $4 \cdot 2 + 1 = 9$

Jos $x = 3$, vasemmaksi puoleksi saadaan $4 \cdot 3 + 1 = 13$

Jos $x = 2{,}5$, vasemmaksi puoleksi saadaan $4 \cdot 2{,}5 + 1 = 11$

Yhtälön ratkaisu on siis $x = 2{,}5$.

Ratkaisu on luvun 2 ja luvun 3 välissä, sillä tehtävänannon yhtälön oikea puoli on 11, joka on lukujen 9 ja 13 välissä.

Kokeilemalla pystyy ratkaisemaan nopeasti yksinkertaisia yhtälöitä. Jos yhtälö on monimutkaisempi tai sen vastaus on desimaaliluku, on nopeampaa ratkaista yhtälö tavanmukaisella tavalla. Ensimmäisen asteen – ei-tekijämuotoiset – yhtälöt ratkaistaan seuraavasti:

1. Siirretään muuttujat yhtäsuuruusmerkin samalle puolelle ja muut termit yhtäsuuruusmerkin toiselle puolelle.

2. Yhdistetään samanmuotoiset termit.

3. Jaetaan yhtälö puolittain muuttujan kertoimella.

Esimerkki

Ratkaise yhtälö $3 + 2x = -8x + 5$

vaihe 1 $2x + 3 = -8x + 5$

vaihe 2 $2x + 8x = 5 - 3$

$10x = 2 \quad :10$

vaihe 3 $x = 0{,}2$

Tehtäviä

1. Ratkaise yhtälöt joko päättelemällä (kokeilemalla) tai tavanmukaisella yhtälönratkaisuprosessilla.

Jos "arvaat" yhtälön ratkaisun, sinun on sijoittamalla perusteltava, että kyseessä todella on yhtälön ratkaisu.

a) $3x + 3 = 9$

b) $x - 3 = -x - 1$

c) $\frac{x}{2} + 1 = 0{,}5$

2. Ratkaise yhtälöt. Jos vastaus on pitkä desimaaliluku, pyöristä vastaus kolmen desimaalin tarkkuuteen.

a) $3y + 1 = 2$

b) $4e + 6 = -2e + 13$

c) $0{,}2x + 3 = 0$

3. Tohtori.fi-sivuston mukaan ihmisen huippusyke lasketaan kaavalla

$$\text{Huippusyke} = 205 - \frac{1}{2} \cdot \text{ikä}$$

Aerobisessa harjoittelussa sykkeen tulisi olla noin 75 % huippusykkeestä.

Laske

a) 20-vuotiaan ihmisen huippusyke _____

b) aerobisen harjoittelun syke. _____

4. Jos kolmion sivujen pituudet ovat a, b ja c, saadaan piiri, p, selville kaavan $p = a + b + c$ avulla.

Ratkaise b tästä yhtälöstä. _____

5. Tohtori.fi-sivuston mukaan ihmisen huippusyke lasketaan kaavalla

$$\text{Huippusyke} = 205 - \frac{1}{2} \cdot \text{ikä}$$

Aerobisessa harjoittelussa sykkeen tulisi olla noin 75 % huippusykkeestä.

Kuinka vanhan ihmisen

a) huippusyke on 179 b) aerobisen harjoittelun syke on 141?

Muista laittaa lasku tai päättelyketju näkyviin.

Toisen asteen yhtälö

Toisen asteen yhtälöksi kutsutaan sellaista yhtälöä, jossa muuttuja x on toisessa potenssissa (x^2). Toisen asteen yhtälöitä käytetään esimerkiksi ratkaistaessa Pythagoraan lauseeseen ja pinta-aloihin liittyviä ongelmia.

Esimerkki

a) Ratkaise yhtälö $x^2 - 16 = 9$.

Ratkaisu:

$x^2 - 16 = 9 \quad \text{II} + 16$

$x^2 = 9 + 16$

$x^2 = 25$

$x = \sqrt{25} = \pm 5$

eli $x = 5$ tai $x = -5$.

b) Ratkaise yhtälö $2x^2 + 5 = 37$.

Ratkaisu:

$2x^2 + 5 = 37 \quad \text{II} - 5$

$2x^2 = 37 - 5$

$2x^2 = 32 \quad \text{II}:2$

$x^2 = \frac{32}{2}$

$x = 16$

$x = \sqrt{16} = \pm 4$

eli $x = 4$ tai $x = -4$.

Tehtäviä

1. Ratkaise x ilman laskinta.

a) $x^2 = 25$ _____ b) $x^2 = 36$ _____

c) $x^2 = 49$ _____ d) $x^2 = 100$ _____

2. Ratkaise x ilman laskinta.

a) $x^2 + 1 = 17$ _____ b) $x^2 - 5 = 4$ _____

c) $x^2 + 10 = 91$ _____ d) $3 + x^2 = 67$ _____

3. Ratkaise x.

a) $5x^2 = 45$ _____

b) $4x^2 + 3 = 28$ _____

c) $3x^2 - 8 = 424$ _____

d) $4x^2 = 2x^2 + 242$ _____

4. Ratkaise yhtälön tuntematon.

a) $A = a^2$

$A = 125\ m^2$

$a = ?$ _____

b) $A = \pi \cdot r^2$

$A = 2\ m^2$

$r = ?$ _____

c) $A = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$A = 3{,}52\ m^2$

$h = 1{,}2\ m$

$r = ?$ _____

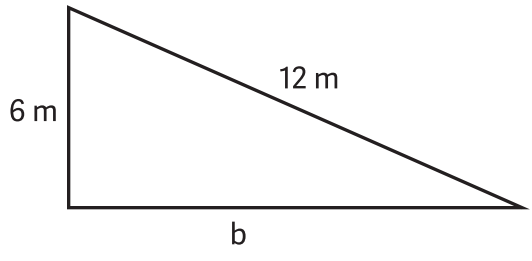
5. Ratkaise Pythagoraan lauseen tuntematon.

$a^2 + b^2 = c^2$

$a = 6$ m

$c = 12$ m

$b = ?$ _____



6. Ympyräpohjaisen lieriön muotoisen säiliön tilavuus on 2,3 m^3. Lieriön korkeus on 1,5 m. Mikä on säiliön säde (r)? (Lieriön tilavuus ratkaistiin kaavalla $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$)

_____

7. Neliön muotoisen huoneen pinta-ala on 30 m^2. Mikä on huoneen sivun pituus?

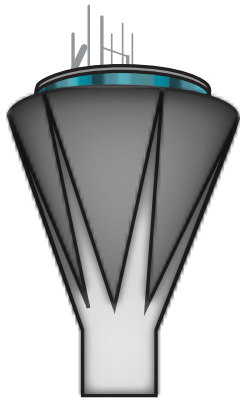
8. Koira tarvitsee jaloittelupinta-alaa vähintään 2 m^2 (alle 10 kg painavat koirat).

a) Jos häkin pohja on muodoltaan neliö, kuinka pitkiä sivujen on oltava?

b) Jos koira pidetään ketjussa, kuinka pitkä ketjun on oltava? (Tällöin koiralla on ympyränmuotoinen jaloittelualue.)

9. Neliön muotoisen huoneen pinta-ala on 18 m^2. Mikä on huoneen sivun pituus piirustuksessa, jonka mittakaava on 1 : 50?

10. Kaupunkiin tarvitaan vesitorni, jonka säiliö on tilavuudeltaan 1 000 m^3. Säiliön muodoksi tulee ympyräpohjainen kartio. Säiliön korkeuden on oltava vähintään 12 m ja enintään 16 m.



a) Mikä on suurin mahdollinen halkaisija?

b) Mikä on pienin mahdollinen halkaisija?

Kolmannen asteen yhtälö

Kolmannen asteen yhtälössä muuttuja x on kolmannessa potenssissa (x^3). Kolmannen asteen yhtälöitä käytetään esimerkiksi ratkaistaessa kolmiulotteisiin kappaleisiin liittyviä ongelmia. Kolmannen asteen yhtälöt ratkaistaan samoin kuin toisen asteen yhtälöt, ainoastaan neliöjuuri $(\sqrt{\ })$ muuttuu kuutiojuureksi $(\sqrt[3]{\ })$.

Esimerkki

Ratkaise yhtälö $2x^3 + 5{,}75 = 37$.

Ratkaisu:

$2x^3 + 5{,}75 = 37 \quad \text{II} - 5{,}75$

$2x^3 = 37 - 5{,}75$

$2x^3 = 31{,}25 \qquad \text{II} : 2$

$x^3 = \dfrac{31{,}25}{2}$

$x = \sqrt[3]{15{,}625}$

$x = 2{,}5$

Tehtäviä

1. Ratkaise x ilman laskinta.

a) $x^3 = 27$ _____ b) $x^3 = 1000$ _____

c) $x^3 = 8$ _____ d) $x^3 = -8$ _____

2. Ratkaise x.

a) $x^3 + 9 = 73$ _____ b) $x^3 - 49 = 167$ _____

c) $3x^3 = 648$ _____ d) $2x^3 + 2{,}25 = 9$ _____

3. Ratkaise yhtälön tuntematon.

a) $V = a^3$

$V = 125\ \text{m}^3$

$a = ?$

b) $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

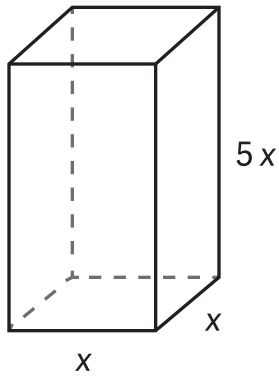
$V = 124\ \text{cm}^3$

$r = ?$

4. Kuution muotoisen säiliön tilavuuden pitäisi olla 2 m^3. Kuinka pitkä kuution sivun pituuden on oltava?

5. Puolipallon muotoisen hiekkakasan tilavuus on 5 m^3. Kuinka suuri ympyrän halkaisijan on oltava?

6. Kuvan mukaisen rakennelman tilavuus on 100 m^3. Ratkaise x.



Funktiot ja kuvaajat

Funktiolla kuvataan matematiikassa kahden muuttujan välistä riippuvuutta. Muuttujien riippuvuutta voidaan kuvata kuvaajalla, joka piirretään koordinaatistoon. Funktion kuvaajan avulla yleensä joko nopeutetaan laskutoimitusta tai havainnollistetaan muuttujien riippuvuutta.

Kuvaajia tulkitessasi, huomioi seuraavat seikat:

1. Lue tarkasti kuvaajan otsikko.

2. Lue tarkasti vaaka- ja pystyakselien otsikot ja yksiköt.

3. Tarkista, alkaako pystyakselin lukema luvusta 0.

4. Tarkasta, onko akseleiden väli tasainen.

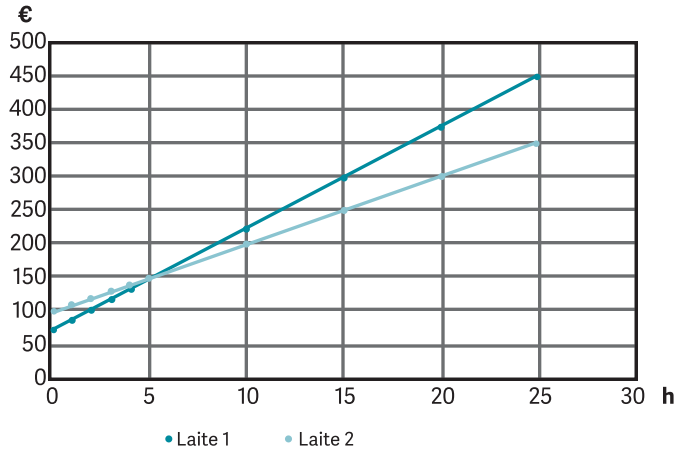
Esimerkki

Oheinen kuvaaja esittää kahden eri vuokraajan laitevuokrauksen hintoja. Tulkitse kuvaajasta, kuinka paljon maksaa

a) laitteen 1 vuokraus 10 tunniksi

b) laitteen 2 vuokraus 24 tunniksi.

c) Kumman laitteen vuokraus tulee halvemmaksi, jos laitetta käytetään 4 tuntia?



Ratkaisu:

a) Laitteen 1 vuokraus maksaa kuvaajan mukaan 225 €.

b) Laitteen 2 vuokraus maksaa kuvaajan mukaan noin 340 €.

c) Laite 1 tulee halvemmaksi.

Tehtäviä

1. Kuvaaja esittää erään sähkökiukaan käyttökustannuksia. Tulkitse kuvaajasta, kuinka paljon maksaa sähkökiukaan käyttö, kun se on käytössä

a) 2 tuntia _____ b) 5 tuntia _____

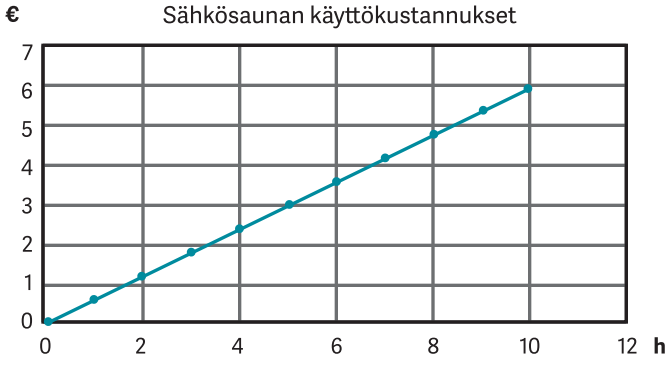
c) 10 tuntia. _____

d) Ennusta, kuinka paljon maksaisi käyttää kiuasta 11 tuntia.

_____

e) Kuinka kauan kiuasta voisi käyttää 1 €:lla?

_____



2. Myyjän kuukausipalkka määräytyy myytyjen tuotteiden lukumäärän mukaan seuraavan kuvaajan mukaisesti. Tulkitse kuvaajasta, kuinka paljon myyjä saa palkkaa, kun hän myy kuukaudessa

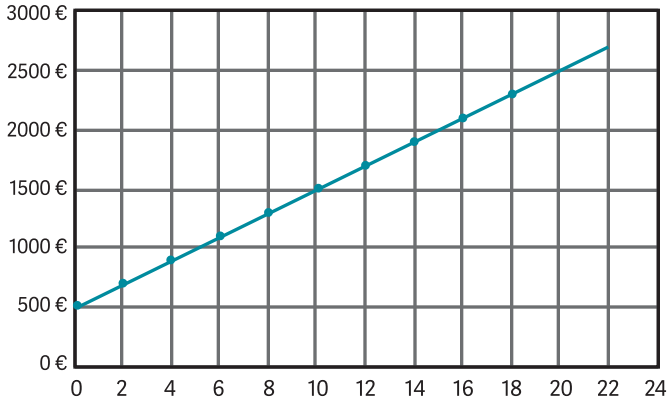
a) 2 tuotetta _____

b) 10 tuotetta _____

c) 16 tuotetta. _____

d) Kuinka monta tuotetta myyjän on myytävä, jotta hänen kuukausipalkkansa olisi 2 000 €?

_____



3. Erään tuotteen kysynnän ja hinnan välillä on havaittu olevan kuvaajan mukainen riippuvuus. Kuinka paljon tuotetta myydään, kun hinta on

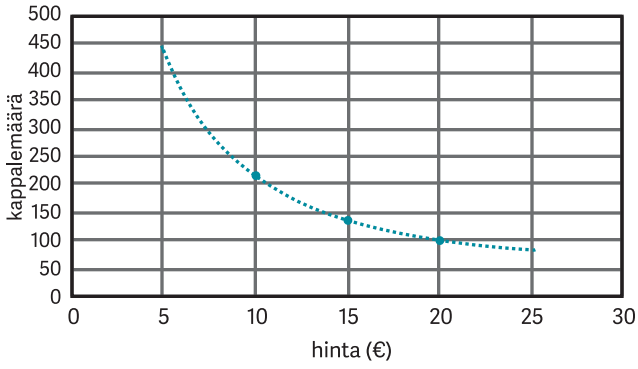
a) 10 € _____

b) 15 € _____

c) 20 €? _____

d) Kumpi hinta antaa suuremman tuoton: 10 € vai 5 €?

_____

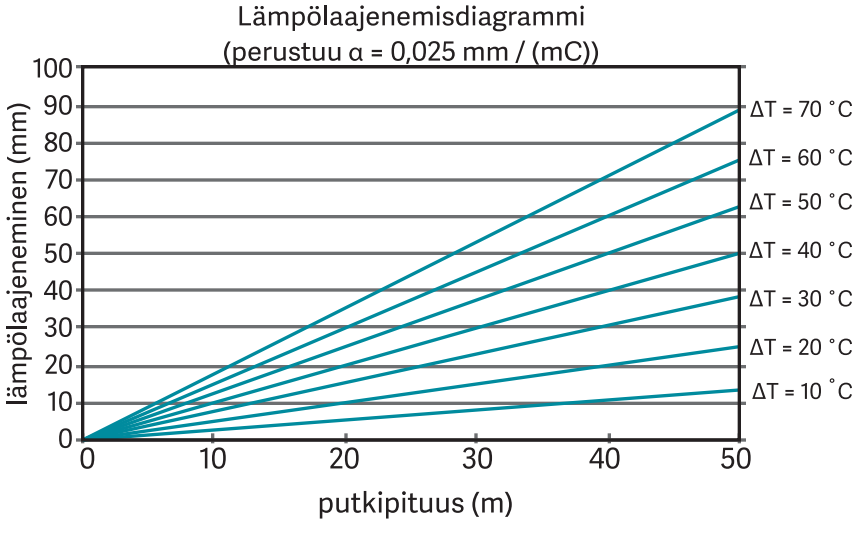


4. Pituuden lämpölaajeneminen voidaan laskea kappaleen 5.2 tehtävässä 10 olleen yhtälön avulla. Eräälle putkimateriaalille laadittiin pituuden lämpölaajenemisesta oheinen kuvaaja.

a) Kuinka paljon pitenee 20 metriä pitkä putki, jos lämpötila nousee 60 °C? _____

b) Kuinka paljon lämpötilan olisi noustava, jotta 30 m pitkä putki pitenisi noin 45 mm? _____

c) Kuinka paljon 200 m pitkän putken pituus vaihtelee vuoden aikana, jos lämpötila on talvella –40 °C ja kesällä +30 °C? _____



5. Tehtävässä 6 on kahden eri sementtilajin kuivumista havainnollistavat käyrät eri lämpötiloissa.

a) Kuinka suuri puristuslujuus yleissementillä on kahden vuorokauden kuluttua, kun se valetaan +20 °C:n lämpötilassa? _____ MPa

b) Mikä on vastaava lukema rapidsementille? _____

c) Betonia ei saa päästää jäätymään ennen kuin se on saavuttanut 5 MPa:n kovuuden. Kuinka kauan yleissementistä valmistetulle betonille kestää saavuttaa tämä kovuus, jos se valetaan +5 °C:n lämpötilassa? _____

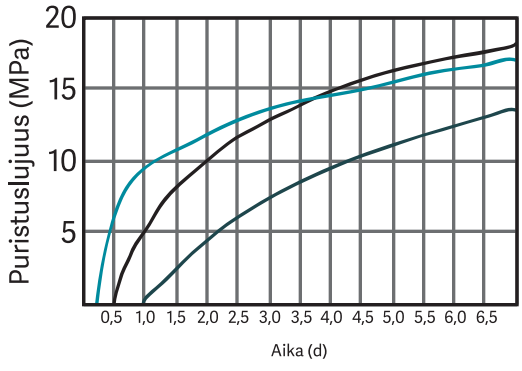
d) Mikä on vastaava lukema rapidsementille? _____

6. Kummastakin sementtilajista tehdyn betonin lopulliseksi kovuudeksi tulee noin 20 MPa. Muotin saa purkaa, kun tästä kovuudesta on saavutettu 60 %. Kuinka kauan valun pitää antaa kuivaa muotissa seuraavissa tilanteissa?

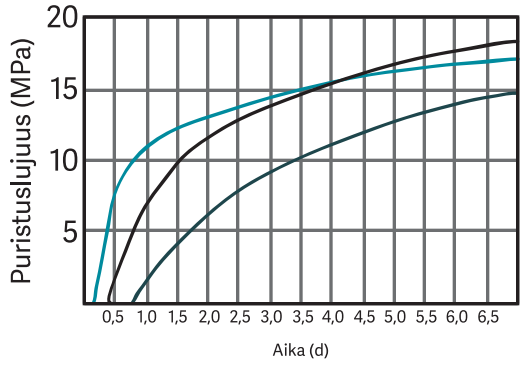
a) yleissementti +20 °C:ssa _____ b) rapidsementti +20 °C:ssa _____

c) yleissementti +5 °C:ssa _____ d) rapidsementti +5 °C:ssa _____

Yleissementti

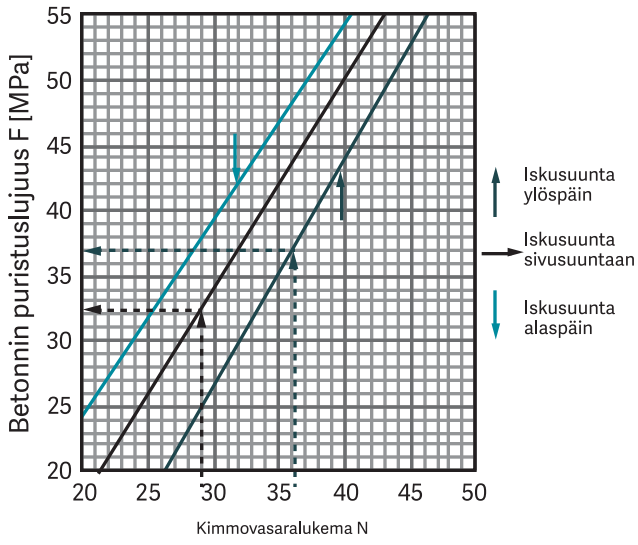


Rapidsementti



– Vaaleansininen käyrä +40 °C
– Musta käyrä +20 °C
– Tummansininen käyrä +5 °C
(Mukailtu lähteestä Sementti-opas 2010)

7. Kimmovasara on työkalu, jonka avulla voidaan mitata betonilajin kovuutta. Kimmovasaran antama lukema riippuu oheisen kuvaajan mukaisesti iskusuunnasta.



a) Betoniseinän kovuutta mitattiin, jolloin iskusuunta oli vaakasuoraan. Vasaran antama lukema oli 32 N. Kuinka suuri oli betonin kovuus? (*Anna vastaus oikeassa yksikössä.*)

b) Apupoika mittasi elementtitehtaalla palkin kovuutta. Hän kirjoitti ylös ainoastaan kimmovasaran antaman lukeman: ”39 N.”

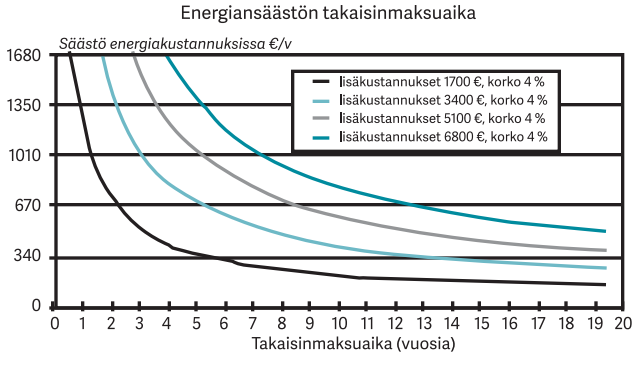
Kuinka suuria kovuuksia tämä voi tarkoittaa?

8. Tarkastele alla olevaa kuvaa.

a) Yritys ostaa 6 800 € maksavan aurinkopaneelilaitteiston. Yritys arvelee, että laitteiston ansiosta sähkölasku on vuodessa noin 500 euroa pienempi. Kuinka monta vuotta on investoinnin takaisinmaksuaika?

b) Kotitalouteen hankitaan suoran sähkölämmityksen rinnalle 1 700 € maksava ilmalämpöpumppu. Kuinka monta euroa säästöä vuodessa pitäisi vähintään kertyä, jotta takaisinmaksuaika olisi alle 5 vuotta?

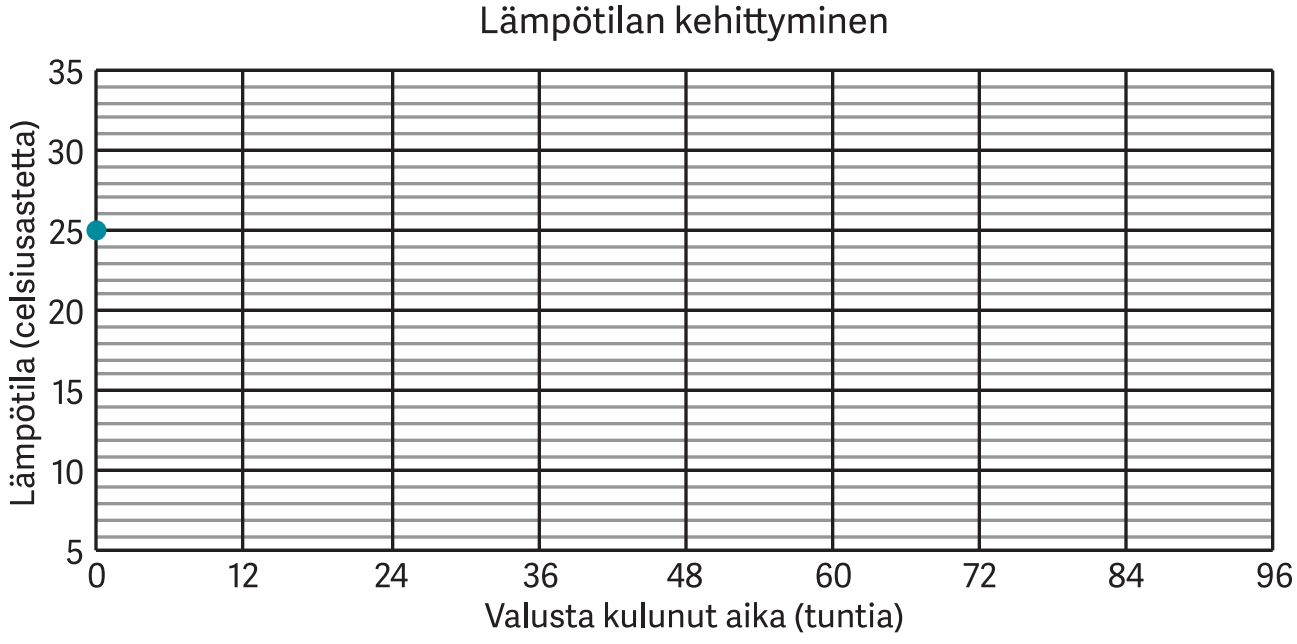
c) Eräs investointi maksaa 4 250 €. Investoinnin pitäisi maksaa itsensä takaisin noin 7 vuodessa. Kuinka monta euroa säästöä pitäisi vuodessa kertyä?



9. Betoni valettiin syksyllä. Betonin lämpötilaa mitattiin sen kylmimmästä kohdasta. Mittauksen tuloksena saatiin seuraavat lämpötilat: (*Huom.! Voit tehdä tämän tehtävän myös taulukko-ohjelmalla.*)

1. päivä klo 9:00	+25 °C	0 h
1. päivä klo 21:00	+30 °C	12 h
2. päivä klo 9:00	+28 °C	24 h
2. päivä klo 21:00	+24 °C	36 h
3. päivä klo 9:00	+19 °C	48 h
3. päivä klo 21:00	+16 °C	60 h
4. päivä klo 9:00	+14 °C	72 h
loput mittaukset	+11 °C	84 h

Havainnollista lämpötilan kehittymistä sijoittamalla arvot alla olevaan kuvaajaan ja piirrä arvojen kautta lämpötilaa kuvaava käyrä. *(Ensimmäinen arvo on sijoitettu malliksi.)*



6

Talousmatematiikka

- Verotus
- Korot
- Indeksilaskenta

Palkkatulojen verotus

Palkansaaja joutuu maksamaan ansioistaan veroa. Olet ehkä jo toimittanutkin verokortin kesätöitä varten työnantajallesi. Verokortista selviävät ennakonpidätysprosentti ja tulorajat. Kyseiset arvot ovat kuitenkin vain arvioita – jos tulosi vuoden mittaan olennaisesti muuttuvat suunnitellusta, kannattaa verokorttikin laskettaa uudestaan vero.fi.-palvelussa.

Vaikka verotus onkin varsin automatisoitua, tavallisen palkansaajan on osattava laskea ennakonpidätyksen määrä ja ymmärrettävä verotuksen perusteet. Harjoitellaan ensin laskemaan ennakonpidätyksen määrää eri tilanteissa.

Esimerkki

Pentti Timpurin verokortti näyttää seuraavanlaiselta. Lasketaan ennakonpidätyksen määrä kuukauden osalta seuraavissa tilanteissa.

VERO SKATT

VEROKORTTI PÄÄTOIMEN PALKKATULOA VARTEN 2015
SKATTEKORT FÖR LÖN AV HUVUDSYSSLA 2015
Verotuskunta Beskattningskommun
91 HELSINKI
Henkilötunnus Personbetckning
123456-1234

Pentti Timpuri

Ennakonpidätysprosentit 1.2.2015 alkaen Förskottsinnehållningssatserna fr.o.m. 1.2.2015			
Palkkaa varten För lön		**Merityötuloa varten För sjöarbetsinkomst**	
Perusprosentti Grundprocent	Lisäprosentti Tilläggsprocent	Perusprosentti Grundprocent	Lisäprosentti Tilläggsprocent
14,0	34,0		

Työnantaja toimittaa ennakonpidätyksen vaihtoehdon A mukaisesti, jos työntekijä ei ole vaatinut yhden tulorajan käyttämistä (vaihtoehto B). Perusprosentti ja lisäprosentti ovat samat riippumatta siitä, kumpaa vaihtoehtoehtoa käytetään.

Arbetsgiven verkställer förskottsinnehållningen enligt alternativ A, förutsatt att arbetstagaren inte begärt att en enda inkomstgräns ska tillärnpas (alternativ B). Grundprocenten och tilläggsprocenten är desamma obercende av vilketalternativ du väljer.

A **Työnantaja toimittaa ennakonpidätyksen palkkakaudentulorajan mukaan. Arbetsgivaren verkställer förskottsinnehållningen enligt löneperiodens inkomstgräns.**

Palkkakauden tuloraja Löneperiodens inkomstgräns					
kuukaudessa per månad	kahdessa viikossa per två veckor	viikossa per vecka	päivässä per dag	Merityötulo päivässä Sjöarbetsinkomst per dag	Laskennallinen tuloraja ATK-järjestelmiä varten Kalkylerad inkomstgräns för datasystem
1 590,60	700,41	380,32	55,60		18 800,00

B ☐ **Haluan, että työnantaja toimittaa ennakonpidätyksen yhden tulorajan mukaan. Valintaa ei voi vaihtaa kesken vuoden. Jag väljer förskottsinnehållningen enligt en enda inkomstgräns. Alternativet kan inte bytas mitt under året.**

18 000,00	Tuloraja ajalle 1.2. – 31.12. Tarkista, että tuloraja kattaa myös lomarahan. Työnantaja käyttää tammikuussa edellidsen vuoden verokorttia. Inkomstgräänsen för tiden 1.2. – 31.12. Kontrollera att inkomstgränsen täcker också semesterpenningen. I januari använder arbetsgivaren skattekorttet för det föregående året.

a) Työntekijä on valinnut vaihtoehdon A, ja hänen bruttopalkkansa on ollut kuukaudessa 1 500 euroa.

Koska bruttotulot eivät ylitä kuukauden tulorajaa, hänen ennakonpidätyksensä määrä lasketaan kuukausituloista suoraan perusprosentilla:

$0{,}14 \cdot 1\,500\ € = 210\ €$.

Vastaus: Ennakonpidätystä peritään 210 euroa.

b) Työntekijä on valinnut vaihtoehdon A, ja hänen bruttopalkkansa on ollut 2 600 euroa kuukaudessa.

Nyt bruttotulot ylittävät kuukauden tulorajan. Tulorajaan asti ennakonpidätystä peritään perusprosentin ja tulorajan *ylittävästä* palkanosasta lisäprosentin mukaan:

$0{,}14 \cdot 1\,590{,}6\ € + 0{,}34 \cdot (2\,600\ € - 1\,590{,}6\ €) = 565{,}88$.

Vastaus: Ennakonpidätystä peritään 565,88 euroa.

c) Työntekijä on valinnut vaihtoehdon B ja hänen bruttopalkkansa on ollut 2 600 euroa kuukaudessa, eikä hänellä ole aikaisempia tuloja verovuodelta.

Kun valitaan vaihtoehto B, koko vuoden ajaksi on vain yksi tuloraja, jonka täytyttyä kaikki loppuvuoden tulot verotetaan lisäprosentin mukaan. Nyt tulot jäävät selvästi alle tulorajan, joten ennakonpidätyksen määrä lasketaan perusprosentilla:

$0{,}14 \cdot 2\,600\ € = 363\ €$.

Vastaus: Ennakonpidätystä peritään 364 €.

Vertaile kohtia B ja C. Huomaat, että ennakonpidätyksen määrä on eri, vaikka bruttotulot ovat samat. Vuoden mittaan tilanne kuitenkin tasoittuisi, sillä vaihtoehdon B valinneella tuloraja täyttyy hyvissä ajoin ennen vuoden vaihdetta, jonka jälkeen kaikkia tuloja verotettaisiin lisäprosentin mukaan. On lopulta täysin sama, kumman vaihtoehdon valitsee. Verohallinto laskee toteutuneiden tulojen perusteella lopullisen veron määrän. Jos maksetun ennakonpidätyksen määrä ei riitä, palkansaaja joutuu maksamaan jäännösveroa.

Kuinka maksetut verot jakautuvat?

Ansiotuloverotus jakautuu käytännössä kahteen osaan: valtion tuloverotukseen ja kunnallisverotukseen. Lisäksi on muutamia muita pienempiä veroluonteisia maksuja, kuten Yle- ja kirkollisvero sekä sairaanhoitomaksut. Ennakonpidätysprosenttisi on määritetty siten, että sen pitäisi kattaa kaikki nämä maksut.

Valtion tuloverotus määräytyy joka vuosi määriteltävän taulukon perusteella. Vuoden 2016 tuloverotaulukko näyttää seuraavalta:

Verotettava ansiotulo, euroa	Vero alarajan kohdalla, euroa	Vero alarajan ylittävästä tulon osasta, %
16 700–25 000	8	6,5
25 000–40 800	547,50	17,5
40 800–72 300	3 312,50	21,5
72 300–	10 085,00	31,75

Tuloveron laskeminen ei siis juuri eroa aikaisemmista laskuista. Tulovero on progressiivista, eli sitä maksetaan suhteessa aina enemmän tulojen kasvaessa. Toisaalta pienituloiset välttyvät valtion tuloverolta kokonaan.

Kunnallisvero määräytyy asuinkunnan mukaan. Se ei ole progressiivinen vero, eli sitä kannetaan tuloluokasta riippumatta saman prosentin mukaan.

Sairaanhoitomaksut, työeläke- ja vakuutusmaksut peritään niin ikään saman prosentin mukaan kaikilta palkansaajilta. Sitä vastoin kirkollisveron joutuvat maksamaan vain kirkkoon kuuluvat kansalaiset.

Yle-vero koskettaa jokaista kansalaista, ja sitä peritään 0,68 % verotettavista tuloista. Veron maksimimäärä on kuitenkin 143 euroa, eikä sitä peritä lainkaan, jos sen määrä jää alle 70 euroon.

Pääomatuloa ovat esimerkiksi vuokratulot ja osakkeiden osingot. Pääomatuloista veroa maksetaan 30 000 euron tuloihin asti 30 % ja sen ylittävistä tuloista 34 %.

Esimerkki

Oululainen kirkkoon kuuluva kirvesmies on ansainnut vuoden aikana 45 000 euroa. Oulun kunnallisveroaste on 20 %, kirkollisvero 1,25 % ja sairaanhoitomaksu 1,32 %. Lisäksi työttömyysvakuutusmaksun suuruus on 1,15 % ja työeläkemaksun 5,7 %.

a) Kuinka paljon kirvesmiehen tulee maksaa valtion tuloveroa, kunnallisveroa ja muita veroluonteisia maksuja?

b) Mitkä ovat kirvesmiehen lopulliset nettotulot?

Ratkaisu:

a) Lasketaan ensin valtion tulovero käyttämällä edellisellä sivulla olevaa taulukkoa. Esimerkin tuloilla päädytään toiseksi korkeimpaan tuloluokkaan, jolloin tuloveron määräksi saadaan

3 312,5 € + 0,215 · (45 000 € – 40 800 €) = 4 215,5 €.

Lasketaan ensin kunnallisveroprosentti ja muut ei-progressiiviset maksut yhteen:

20 % + 1,25 % + 1,32 % + 1,15 + 5,7 % = 29,42 %.

Veroa kannetaan siis

0,2942 · 45 000 € = 13 239 €.

Lisäksi tulee vielä Yle-vero:

0,0068 · 45 000 € = 306 €.

Yle-veroa on siis maksettava 143 euroa.

Veroa maksetaan yhteensä 4 215,5 € + 13 239 € + 143 € = 17 597,5 €.

b) Kirvesmies saa nettotuloa

45 000 € – 17 597,5 € = 27 402,50 €.

Tehtäviä

1. Selitä seuraavat termit:

Bruttopalkka = _____

Nettopalkka = _____

Ennakonpidätys = _____

2. Talotekniikan alalla kuukausipalkka määritellään siten, että henkilökohtainen aikapalkka kerrotaan luvulla 173.

a) Kuinka suuri kuukausipalkka on luokkaan 1 kuuluvalla työntekijällä?

_____

b) Kuinka suuri kuukausipalkka on luokkaan 4 kuuluvalla työntekijällä?

_____

Luokka	€/h
5	10,16
1	12,44
2	14,88
3	15,68
4	16,60

3. Verokortissa on palkkakauden tulorajana 1 600 euroa/kk. Perusprosentti on 13 ja lisäprosentti 35. Kuinka paljon palkansaaja joutuu maksamaan ennakonpidätystä, jos hänen tulonsa ovat kuukaudessa

a) 1 400 € _____

b) 2 000 € _____

c) 3 090 €? _____

4. Verokortissa palkkakauden tuloraja on 2 600 euroa/kk. Perusprosentti on 18 ja lisäprosentti 38. Kuinka paljon palkansaaja joutuu maksamaan ennakonpidätystä, jos hänen tulonsa ovat kuukaudessa

a) 2 100 € _____

b) 2 700 € _____

c) 4 000 €? _____

5. Verokortissa perusprosenttisi on 24 % ja lisäveroprosenttisi on 46 %. Tulorajasi on 46 300,00 €/v. Kuinka paljon maksat veroja yhteensä, jos ansaitset vuodessa

a) 43 200,00 €

b) 46 300,00 €

c) 50 000,00 €

d) 55 000,00 €?

6. Laske, kuinka paljon seuraavista vuosituloista pitää suorittaa valtion tuloveroa:

a) 11 000 €

b) 22 000 €

c) 30 000 €

d) 88 000 €.

7. Vertaa edellisen tehtävän kohtia b ja d. Tulot ovat kasvaneet nelinkertaisiksi. Kuinka moninkertaiseksi tulovero kasvoi?

8. Ansaitsit vuodessa 34 000 euroa.

a) Laske tuloistasi maksettavan ennakonpidätyksen määrä, kun asut Rovaniemellä (kunnallisvero 21 %). Tuloista tulee maksaa myös valtion tulovero, 1,15 % työttömyysvakuusmaksua, 1,32 % sairaanhoitomaksua, 5,7 % eläkemaksua, Yle-veroa sekä 1,75 % kirkollisveroa.

b) Kuinka suuri on kokonaisveroprosenttisi?

c) Joudutko maksamaan jäännösveroa vai saitko veronpalautusta, kun olit maksanut vuodessa ennakonpidätystä 12 300 euroa?

9. Palkkasi on 10,16 €/h. Säännöllinen työaikasi on klo 8.00–16.00. Ensimmäisellä viikolla klo 16.00:n jälkeen teet ma–ti ylitöitä 2 h/päivä ja vielä lisäksi lauantaina 4 h. Toisella viikolla klo 16.00:n jälkeen teet ylitöitä seuraavasti: ma–ti 3 h/päivä ja ke–pe 1 h/päivä.

a) Mikä on bruttopalkkasi näiltä viikoilta?

b) Mikä on nettopalkkasi, jos kokonaisveroprosenttisi olisi 23,5 %?

Lisä	1.6.2015 €/h
Iltavuorolisä klo 17–23	1,00
Yövuorolisä klo 26–06	2,02

Viikoittaisella ylityöllä tarkoitetaan työtä, joka ylittää säännöllisen viikoittaisen 40 tunnin työajan. Viikoittaiseen ylityöhön ei lasketa mukaan saman työviikon aikana tehtyä vuorokautista ylityötä.

Vuorokautisesta ja viikoittaisesta ylityöstä maksetaan työpalkan lisäksi ylityölisää, jonka suuruus kahdelta ensimmäiseltä tunnilta on 50 % ja seuraavilta tunneilta 100 % keskituntiansiosta.

10. Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

a) Tuntiansiosi on 12,44 €/h. Töitä on säännöllisesti 40 h/vko. Kuinka paljon ansaitset vuositasolla bruttona, loma-aika (5 viikkoa) pois luettuna, jos ei oteta huomioon mahdollisia palkanlisiäsi tai muita korvauksia?

b) Vuosilomapalkka ja lomakorvaus lasketaan keskituntiansion perusteella siten, että keskituntiansio kerrotaan lomapäivien määrästä riippuvalla kertoimella. Täyden vuosiloman päivien määrä on 30 ja kerroin 222,4. Lisäksi maksetaan lomaraha, joka on 50 % loma-ajan palkasta. Jos oletetaan, että keskituntiansiosi olisi 12,44 €/h, kuinka suuri olisi koko vuosiloma-ajan palkkasi?

c) Kuinka suuri olisi bruttoansiosi koko vuodelta?

Arvonlisävero

Arvonlisävero on kulutusvero, joka verottaa tuotteen tai palvelun arvonlisää. Olet varmaan huomannutkin kassakuiteissa erittelyn verottomaan ja verolliseen hintaan. Kuluttajana maksat verottoman hinnan ja arvonlisäveron summan. Suomen arvonlisäverotus on maailmanlaajuisesti tarkasteltuna varsin kireä.

Yleisin alv-kanta on 24 %, mutta tiettyjä poikkeuksiakin on. Esimerkiksi elintarvikkeiden alv-kanta on 14 % ja kirjojen 10 %. Ajantasaisen alv-kantojen erittelyn löydät vero.fi-sivustolta.

Ammatinharjoittajan perustaitoihin kuuluu verollisen ja verottoman hinnan laskeminen.

Esimerkki 1

Raakalaudan veroton hinta oli 0,5 €/m. Ilmoita laudan hinta verollisena.

Ratkaisu:

Koska arvonlisävero lasketaan aina verottomasta hinnasta, verollinen hinta lasketaan korottamalla yksinkertaisesti verotonta hintaa 24 prosenttia:

$$1{,}24 \cdot 0{,}5\,\frac{€}{m} = 0{,}62\,\frac{€}{m}.$$

Verollinen hinta oli 0,62 €/m.

Esimerkki 2

Pienen dumpperin hinta käytettynä oli 6 000 euroa verollisena. Kuinka suuri veroton hinta oli?

Ratkaisu:

Veroton hinta saadaan jakamalla verollinen hinta 1,24:llä (koska verollinen hinta on 124 % verottomasta):

$$\frac{6\,000\ €}{1{,}24} = 4\,838{,}7096\ldots\ € \approx 4\,838{,}71\ €.$$

Dumpperin veroton hinta oli 4 838,71 euroa.

Paina seuraavaksi tarkasti mieleesi taulun sisältö:

Työmaakopin huoneentaulu

Kun haluat verottomasta hinnasta verollisen, kerro 1,24:lla!

Kun haluat verollisesta hinnasta verottoman, jaa 1,24:lla!

Arvonlisäveron tilitys valtiolle

Arvolisävelvolliset yritykset saavat vähentää yritystoimintaa varten hankkimiensa tavaroiden ja palveluiden aiheuttamat arvonlisäverot omasta arvonlisäveronsa määrästä. Muuten vero tulisi maksetuksi kahteen kertaan. Käsitellään ensin juurta jaksain, miten arvonlisää verotetaan yritystoiminnassa ja kuinka alv-vähennys toimii käytännössä.

Esimerkki 1

Pirjon Puurakennus Oy osti puutavaraa leikkimökkiä varten. Puutavara maksoi verollisena 372 euroa. Veroton hinta oli siten $\frac{372\ €}{1{,}24} = 300\ €$. Arvonlisäveroa tuli siis maksettua puutavaran myyjälle 72 euroa.

Kun leikkimökki oli valmis, se myytiin asiakkaalle 1 488 euron verolliseen hintaan. Tällöin veroton hinta oli $1\,488\ € - \frac{1\,488\ €}{1{,}24} = 288\ €$. Arvonlisäveron määrä myyntihinnasta on siten 288 euroa.

Yritys lisäsi puukasan arvoa siis yhteensä 900 euroa (arvonlisä katsotaan verottomista hinnoista), ja juuri tästä summasta yrityksen on suoritettava valtiolle 24 % arvonlisäveroa:

$0{,}24 \cdot 900\ € = 216\ €$.

Kirjanpidossa ei kuitenkaan lasketa näin monimutkaisesti tilitettävän arvonlisäveron määrää. Valtiolle tilitettävä veron määrä lasketaan vähentämällä ostojen arvonlisävero myynnin arvonlisäverosta.

Seuraava esimerkki selventää asiaa. Esimerkissä on käytetty samoja lukuja kuin aiemmassa esimerkissä.

Esimerkki 2

Pirjon Puurakennus Oy myi leikkimökkiä 1 488 euron verolliseen hintaan. Yritys osti valmistusta varten vähennyskelpoista materiaalia 372 euron verolliseen hintaan. Kuinka paljon valtiolle tilitetään arvonlisäveroa?

Ratkaisu:

Lasketaan ensin myynnin alv vähentämällä verollisesta hinnasta veroton:

$$1\,488\ € - \frac{1\,488\ €}{1{,}24} = 288\ €.$$

Sitten määritetään ostojen alv samalla tavalla:

$$372\ € - \frac{372\ €}{1{,}24} = 72\ €.$$

Valtiolle tilitettävä alv = Myynnin alv – Ostojen alv: 288 € – 72 € = 216 €.

Arvonlisäveroa on tilitettävä valtiolle 216 euroa.

Huomaa, että vastaus on juuri sama kuin arvonnoususta laskettu arvonlisävero!

Tehtäviä

1. Käyt ostamassa rakennustarvikkeita. Lisää arvonlisäveron 24 %:n osuus seuraaviin verottomiin summiin:

a) 2 354,51 € _____ b) 1 098,64 € _____

c) 521,36 € _____ d) 28,59 € _____

e) 713,94 € _____ f) 4,00 € _____

2. Laske seuraavista rakennustarvikkeiden summista veroton hinta:

a) 211,11 € _____ b) 381,25 € _____

c) 101,41 € _____ d) 52,31 € _____

e) 957,56 € _____ f) 10,00 € _____

3. Laske seuraavista rakennustarvikkeiden verollisista summista arvonlisäveron osuus:

a) 368,21 € _____

b) 701,39 € _____

c) 1 105,24 € _____

d) 49,23 € _____

e) 2 391,51 € _____

f) 565,00 € _____

4. Firmasi verollinen myynti oli 32 000 euroa. Samassa ajassa alv-vähennyskelpoiset ostot olivat 20 000 euroa. Kuinka paljon tilität valtiolle arvonlisäveroa? Alv = 24 %.

_____

5. Peten verstas myi asiakkaalle verollisena 45 153 euron edestä tavaraa. Samassa ajassa alv-vähennyskelpoiset ostot olivat 34 456 euroa. Kuinka paljon Peten piti tilittää valtiolle arvonlisäveroa? Alv = 24 %.

6. Tmi Repe Remontoija ilmoittaa kuukausittain maksamansa ja saamansa arvonlisäverot verottajalle. Eräänä kuukautena tilanne näytti seuraavalta. Hinnat ovat verollisia.

Ostot:	
Maaleja	1 259,31 €
Tapetteja	2 398,28 €
Kiinnitystarvikkeita	259,36 €
Työkaluja	159,32 €
Liikelounaat:	127,57 €
Työveloitukset:	8 000,00 €
Tarvikemyynti:	3 529,82 €

a) Kuinka paljon Repe maksoi arvonlisäveroa ostoksistaan?

b) Kuinka paljon hän veloitti arvonlisäveroa asiakkailtaan?

c) Kuinka paljon hän maksoi verottajalle tässä kuussa arvonlisäveroa?

7. Kuinka monta prosenttia verollisessa tuotteen myyntihinnassa on lopulta arvonlisäveroa, kun alv-kanta on 24 %?

Korot ja lainat

Sekä yritykset että yksityishenkilöt joutuvat usein isoja hankintoja tehdessään lainaamaan rahaa pankilta. Koska rahan lainaaminen on oltava kannattavaa liiketoimintaa pankeille, lainanottaja joutuu maksamaan enemmän rahaa takaisin kuin hän lainanoton aikaan sai. Tätä rahan määrän lisäystä kutsutaan koroksi. Tässä kappaleessa opetellaan määrittämään koron suuruuksia eri tilanteissa – myös säästäessä. Korkoa maksetaan myös talletuksista, mutta sen määrä on yleensä huomattavasti pienempi kuin luotoissa.

Lainan korkoprosentti määräytyy lainanhakijan taloudellisen tilanteen, lainan kohteen ja yleisen maailmanmarkkinatilanteen pohjalta. Lainan korkoprosentti lasketaan siten, että ohjauskorkoon (esim. euribor tai pankin oma prime-korko) lisätään marginaali, joka riippuu pankin ja lainanottajan keskinäisestä sopimuksesta. Jos lainanottaja on varakas, hän saa lainan pienemmällä marginaalilla kuin köyhempi asiakas.

Laina- ja talletuskorkoprosentit määritellään yleensä vuosikorkona (lyhenne p.a.). Tarvetta on kahdelle kaavalle:

Korkoaika alle vuoden:

$\boldsymbol{R = Krt}$, jossa

R = korko

K = pääoma

r = korkokerroin desimaalimuodossa

t = korkoaika vuorokausissa $\left(\frac{\text{vrk}}{365}\right)$

Korkoaika useita korkokausia:

$K_n = K \cdot q^n$, jossa

K_n on pääoma n:n korkokauden jälkeen

q = 1 + korkokerroin desimaalimuodossa

n = korkokausien lukumäärä

Esimerkki 1

Erehdyt ottamaan 20 päiväksi 600 euron pikavipin, jonka todellinen vuosikorko on 450 %. Määritä luoton koron määrä.

Ratkaisu:

Nyt korkoaika on alle vuoden, joten käytetään ensimmäistä kaavaa:

$$R = 600\,€ \cdot 4{,}5 \cdot \frac{20}{365} = 147{,}95\,€.$$

Joudut maksamaan korkoa 147,95 euroa.

Esimerkki 2

Talletat korkeakorkoiselle tilille 5 000 euroa 10 vuodeksi. Korkoa luvataan 4,6 % vuodessa. Kuinka isoksi summa kasvaa?

Ratkaisu:

Kyse on koronkorosta. Jokaisen vuoden jälkeen korko pääomitetaan, jolloin korkoa alkaa kasvaa alkuperäisen pääoman lisäksi myös jo maksetulle korolle. Sijoitetaan arvot kaavaan:

$K_{10} = 5\,000 \cdot 1{,}046^{10} = 7\,839{,}472\ldots\ € \approx 7\,839{,}47\ €.$

Pääoma on 10 vuoden jälkeen 7 839,47 euroa.

Korkotulot ovat verottajan silmissä pääomatuloa, ja siitä maksetaan vuosittain 30 %:n lähdevero. Totuudenmukaisissa korkolaskuissa tämä pitää ottaa huomioon.

Esimerkki 3

Kesätöissä ollut rakennusmies tallettaa 2 500 euroa vuodeksi tilille, jonka korko on 3,4 %. Kuinka iso pääoma on 5 vuoden kuluttua, kun 30 %:n lähdevero otetaan huomioon?

Ratkaisu:

Korjataan korko todelliseksi vähentämällä siitä 30 %:

$0{,}7 \cdot 3{,}4\ \% = 2{,}38\ \%.$

Lasketaan sitten normaalisti koronkoron kaavalla:

$K_5 = 2\,500\ € \cdot 1{,}0238^5 = 2\,812{,}002\ldots\ € \approx 2\,812{,}00\ €.$

Pääoma on 5 vuoden jälkeen 2 812,00 euroa.

Tehtäviä

1. Ota selvää, mikä on seuraavien korkojen tämänhetkinen taso:

a) 12 kuukauden euribor _____

b) 6 kuukauden euribor _____

c) jonkin pankin oma prime-korko. _____

2. Mikä on opiskelijalle paras tapa rahoittaa auto työmatkoja varten? Pohdi kaverisi kanssa ja esitä pohdintojenne tulokset luokalle.

_____

3. Pikavipin vuosikorko oli 340 %. Kuinka suureksi 5 000 euron pikavipin lainasumma kasvoi

a) 30 päivässä _____

b) 90 päivässä? _____

4. Otit 5 000 euron pankkilainan, jonka vuosikorko on 5,6 %. Kuinka suureksi lainasumma kasvoi

a) 30 päivässä

_____

b) 90 päivässä?

_____

Vertaa vastauksia edelliseen tehtävään.

5. Neuvottelit rakennusfirmallesi 15 000 euron lainan rakennustarvikkeita varten. Lainaehdoissa luki, että luoton korko on 12 kk:n euribor + 2,2 %:n marginaali. Selvitä, mitkä luoton korkokustannukset olisivat yhden kuukauden aikana nykyhetkellä.

_____

6. Laskun suuruus oli alun perin 180 euroa. Maksat laskun 64 päivää myöhässä, ja vuotuinen myöhästymisprosentti on 7,4. Kuinka paljon joudut maksamaan korkoa?

7. Talletat 1 200,00 euroa vuoden määräaikaistilille, jonka korko on 3,5 %. Kuinka paljon tililläsi on rahaa vuoden päästä? Lähdeveron suuruus on 30 %.

8. Tarvitset lainaa pientä hankintaa varten. Vertailet eri pankkien lainaehtoja ja päädyt seuraavaan ratkaisuun:

– lainan määrä 1 400,00 €
– laina-aika 1 v
– kiinteä korko 2,5 %
– lainan nostokulut 100,00 €
– lainan takaisinmaksu kahdessa erässä, veloitus 5,00 €/erä.

Kuinka suuriksi erät muodostuvat?

9. Sijoitat 1 000,00 euroa rahasto-osuuksiin, joiden tuotto-odotus on 10 % vuodessa. Jos nousu on tasaista, mikä osuutesi odotusarvo on

a) puolessa vuodessa

b) vuodessa

c) 10 vuodessa?

10. Sijoitat 4 000,00 euroa 5 vuodeksi pankkitilillesi. Pankki maksaa korkoa vuosittain 0,4 %, ja lähdeveroa peritään 30 %. Kuinka suureksi sijoituksesi kasvaa 5 vuodessa?

11. 👣👣 Sijoitat 4 000 euroa 5 vuodeksi rahastoon, jolle ennustetaan 7 %:n vuosittaista tuottoa.

a) Kuinka suureksi sijoituksesi kasvaa 5 vuodessa? Vertaa vastausta edelliseen tehtävään.

b) Päätät myydä rahasto-osuutesi ja ottaa voitot talteen. Kuinka paljon hyödyt nettona, kun tuotosta tulee maksaa pääomatuloveroa 30 %?

12. 👣👣👣 Määritä korkokanta, jonka mukaan 300 euron pääoma tuottaa 5 euroa korkoa 100 korkopäivässä. Ota myös lähdevero huomioon.

Indeksilaskenta

Tässä kappaleessa opit tulkitsemaan indeksejä. Indeksit kertovat jonkin tuotteen tai hyödykkeen suhteellisen hinnankehityksen verrattuna johonkin tarkasteluvuoteen. Tilastokeskus kerää lukuisia eri indeksejä elämän eri aloilta, muun muassa elinkustannus- ja rakennushintaindeksejä. Kaikki indeksitaulukot ovat löydettävissä Tilastokeskuksen internetsivuilta.

Rahan reaaliarvo vaihtelee. Tämä asia on useimmiten hieman vaikea ymmärtää, sillä usein kuulee ihmisten vertaavan suoraan nykypäivän hintoja 20 vuoden takaisiin hintoihin. Tällaisessa vertailussa ei oteta lainkaan huomioon yleistä inflaatiota eli rahan arvon alenemista. Hintoja tulee siten aina verrata indeksikorjattuina.

Indeksitaulukoissa vertailun ensimmäinen arvo saa aina vertailuluvun 100, joten indeksilukujen vertailu on helppoa. Näet muutoksen prosentteina silmänräpäyksessä.

Esimerkki 1

Rakennuskustannusindeksissä (2010 = 100) vuoden 2015 marraskuussa omakotitalon remontti sai indeksiluvun 108,8.

a) Mihin vuoteen kyseinen rakennuskustannusindeksi vertaa hintoja?

b) Kuinka monta prosenttia omakotitalon remontointi oli kallistunut marraskuussa 2015 suhteessa vuoteen 2010?

Ratkaisu:

a) Koska vuosi 2010 on saanut indeksiluvun 100, tämä indeksi vertaa hintoja vuoteen 2010.

b) Voimme lukea prosenttimuutoksen suoraan indekseistä. Remontointi on kallistunut 8,8 %.

Opetellaan seuraavaksi laskemaan tuotteiden hintojen reaaliarvoja. Käytetään kurssia 1 € = 5,95 mk.

Esimerkki 2

Vuonna 1974 uusi auto maksoi 15 000 markkaa. Muunna auton hinta nykyrahaksi elinkustannusindeksin avulla. Vuoden 2016 tasossa elinkustannusindeksi on 1911 ja vuoden 1974 indeksiluku on 333.

Ratkaisu:

Kerrotaan vanha hinta indeksiluvuista saadulla suhdeluvulla:

$$\frac{1\,911}{333} \cdot 15\,000 \text{ mk} = 86\,081{,}081\ldots \text{ mk}.$$

Muutetaan vielä markat euroiksi, jolloin saadaan

$$\frac{86\,081{,}081\ldots \text{ mk}}{5{,}95\ \frac{\text{mk}}{€}} = 14\,467{,}408\ldots € \approx 14\,500 €.$$

Esimerkki 3

Tutustutaan hieman indeksitaulukon laadinnan perusteisiin. Oheisessa taulukossa ovat Reinon kuukausipalkat vuosittain eriteltyinä:

Vuosi	Palkka
2010	2 600 €
2011	2 700 €
2012	2 500 €
2013	2 900 €
2014	2 980 €

Laaditaan palkoista indeksitaulukko, jossa vuosi 2010 saa arvon 100.

Ratkaisu:

Indeksitaulukon laadinta on pohjimmiltaan prosenttilaskua. Verrataan kunkin vuoden palkkaa vuoden 2010 palkkaan prosentteina. Indeksiluku pyöristetään tässä tapauksessa täyteen prosenttiin.

Vuosi	Palkka	Suhde	Indeksi
2010	2 600 €	1	100
2011	2 700 €	$\frac{2\,700\ €}{2\,600\ €} = 1{,}038\ldots$	104
2012	2 500 €	$\frac{2\,500\ €}{2\,600\ €} = 0{,}961\ldots$	96
2013	2 900 €	$\frac{2\,900\ €}{2\,600\ €} = 1{,}115\ldots$	112
2014	2 980 €	$\frac{2\,980\ €}{2\,600\ €} = 1{,}146\ldots$	115

Tehtäviä

1. Mitä seuraavat termit tarkoittavat:

– inflaatio _____

– deflaatio _____

– elinkustannusindeksi? _____

2. Kalle sai isältään vuonna 2001 lahjaksi 50 euroa. Kuinka iso summa se olisi vuonna 2016? Elinkustannusindeksin mukaan vuonna 2001 indeksi oli 1 539 ja vuonna 2016 se oli 1 906.

_____

3. Rakennushintaindeksi oli vuoden 2001 tammikuussa 213,9 ja vuoden 2016 tammikuussa 302,6.

a) Perustasoinen omakotitalo maksaa nykyisin helposti 200 000 euroa. Kuinka paljon vastaavan arvoinen talo maksaisi vuoden 2001 rahana?

_____

b) Elinkustannusindeksin vastaavat luvut tehtävän ajankohdille ovat 1 539 ja 1 906. Ovatko rakennuskustannukset kasvaneet nopeammin kuin muu hintataso?

_____

4. Vuokrasopimuksessa voi olla ehto, jonka mukaan vuokra tarkistetaan vuosittain elinkustannusindeksin (EKI) mukaan. Olet solminut vuokrasopimuksen vuonna 2012 (EKI:1863), jolloin vuokran suuruudeksi sovittiin 570,00 €/kk. Mikä on vuokrataso

a) vuonna 2013, kun EKI:1890 _____

b) vuonna 2014, kun EKI:1910? _____

5. Raakalaudan metrihinta on vaihdellut paikallisessa rautakaupassa seuraavasti:

Vuosi	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Metrihinta (€)	0,50	0,56	0,58	0,59	0,65	0,55

Määritä oheiseen kuvioon indeksitaulukko, jossa vuosi 2010 : 100.

Vuosi	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Indeksi	100					

6. Bensiinilitran (E92) hinta oli vuonna 1974 (EKI:333) vain 1,2 mk. Kuinka suuri litrahinta olisi vuoden 2016 tammikuussa (EKI:1906)? 1 € on noin 5,95 mk.

7

Tilastot

- Tilastojen tunnusluvut
- Kuvaajatyypit
- Frekvenssitaulukot
- Oman tilastotutkimuksen tekeminen

Mitä tilastot ovat?

Tilastoja näet todennäköisesti päivittäin eri tiedotusvälineissä. Myös työelämässä käsitellään tilastoja. Tilastoja käytetään havainnollistettaessa tietoa. Niiden avulla voi hahmottaa paremmin ympäröivää maailmaa, ja ne auttavat myös päätöksenteossa. Jotta tilastoja voisi ymmärtää, on tärkeää tuntea peruskäsitteistö. Seuraavassa esitellään tärkeimmät käsitteet.

Tilasto perustuu siihen, että kerätään tutkittavasta asiasta havaintoja. Havainnot kerätään esimerkiksi haastattelemalla tai keräämällä tiedot havainnoimalla tai käyttämällä valmiita tietokantoja. Kerätty aineisto muokataan **taulukoiksi** tai erilaisiksi **graafisiksi esityksiksi**.

Usein aineistosta lasketaan myös erilaisia **tunnuslukuja** (esim. keskiarvo ja keskihajonta).

Tilastoksi kutsutaan havainnoista muodostunutta aineistoa. Havainnot voivat olla mitattuja arvoja tai esimerkiksi haastattelun vastauksia.

Tilastoja muodostettaessa valitaan tilastolle **perusjoukko.** Perusjoukolla tarkoitetaan sitä joukkoa, jonka ominaisuuksia tutkitaan. Lisäksi valitaan **tilastolliset muuttujat** eli tutkittavat ominaisuudet. Usein tilastoja varten otetaan selville myös vastaajan taustatiedot, joilla saattaa olla vaikutusta vastaajan mielipiteisiin, asenteisiin tai käyttäytymiseen. Tällöin puhutaan **taustamuuttujista**. Niitä voivat olla esimerkiksi ikä, sukupuoli tai tulot. Tilastoissa muuttujat saavat arvoja eli ne ovat vastauksia kysymyksiin tai havaintoihin.

Muuttujat voidaan jakaa määrällisiin ja laadullisiin. **Määrälliset muuttujat** saavat arvokseen lukuja ja **laadulliset muuttujat** sanallisia arvoja. Tilastotieteilijöitä usein kiinnostavat numeeriset muuttujat, koska luvuilla voidaan laskea erilaisia tunnuslukuja.

Tilasto tehdään havainnoimalla tai haastattelemalla **tilastoyksikköä** (eli perusjoukkoon kuuluvaa yksilöä). Lisäksi valitaan tapa, jolla tutkimus toteutetaan. **Kokonaistutkimuksessa** tutkitaan kaikki perusjoukkoon kuuluvat yksilöt ja **otantatutkimuksessa** vain osa perusjoukosta tutkitaan. Otantatutkimukseen valittavat yksilöt voidaan valita esimerkiksi arpomalla. Jos otantatutkimuksen tutkittavat yksilöt on valittu harkitusti, esimerkiksi tutkimuksen tekijän mieltymysten mukaan, kyseessä on **näytteenomainen tutkimus**.

Esimerkki

Opiskelijat toteuttavat gallupin, jossa he kysyvät satunnaisesti valituilta koulunsa opiskelijoilta, kuinka tyytyväisiä nämä ovat kouluruokaan. He haastattelevat koulunsa opiskelijoista noin puolet. Samalla he kysyvät opiskelijoiden lempiruokaa.

a) Onko tutkimus kokonais-, otanta- vai näytteenomainen tutkimus?
b) Mikä on tutkimuksen perusjoukko?
c) Mikä on tutkimuksen tilastoyksikkö?
d) Mitä tilastollisia muuttujia tutkimus sisältää?

Ratkaisu:

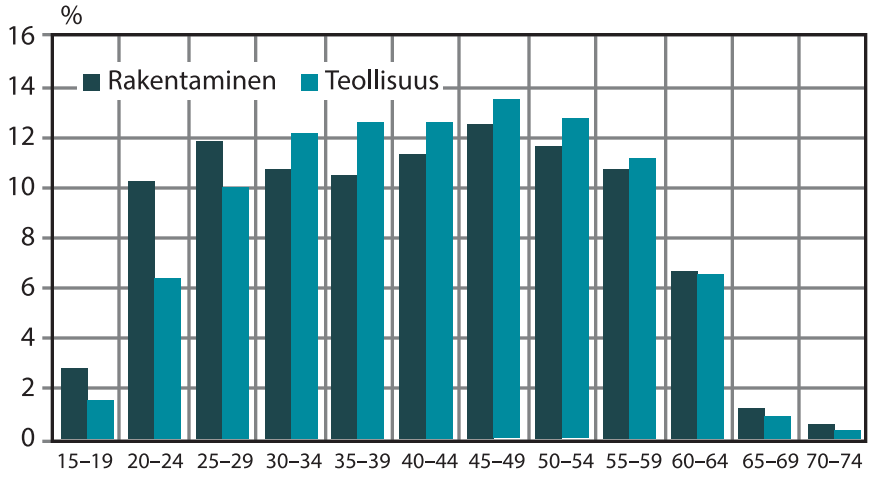
a) Tutkimus on otantatutkimus, koska kaikkia koulun opiskelijoita ei haastatella. Tutkimus ei ole näyte, koska opiskelijat on valittu satunnaisesti.
b) Tutkimuksen perusjoukko on koulun opiskelijat.
c) Tilastoyksikkö on yksi opiskelija.
d) Muuttujia ovat tyytyväisyys kouluruokaan ja lempiruoka.

Kuvaajatyypit

Kuvaajilla on tarkoitus havainnollistaa tietoa. Kuvaajatyyppi valitaan sen mukaan, mikä parhaiten kuvaa aineistoa. Seuraavaksi esitellään muutama yleisin kuvaajatyyppi.

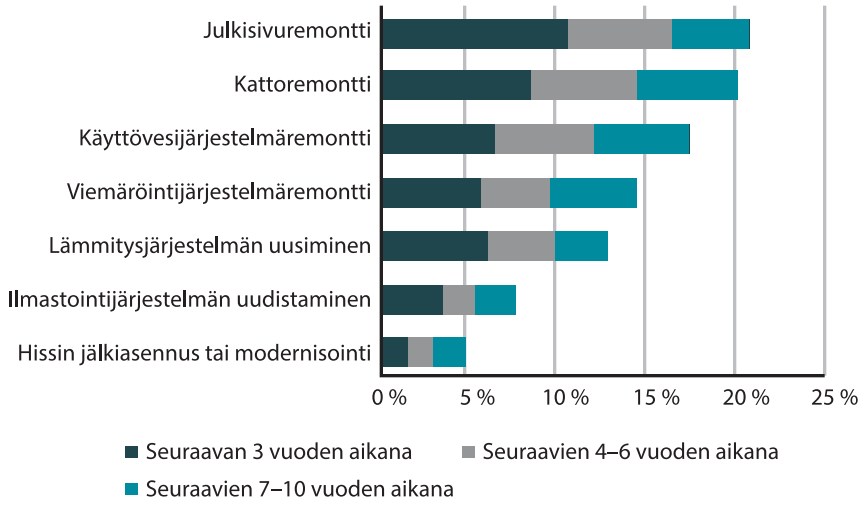
Pylväs- ja palkkidiagrammi

Pylväsdiagrammissa palkin pituus kuvaa havaintojen määrää. Pylväsdiagrammissa palkit ovat pystysuunnassa ja palkkidiagrammissa vaakasuunnassa. Jotta pylväsdiagrammi olisi mahdollisimman selkeä, pylväät kannattaa järjestää pituuden mukaan ja pylväiden pituuden tulee perustua todelliseen tasaväliseen asteikkoon.



Rakennusalan työllisten ikäjakauma vuonna 2013. (Mukailtu lähteestä Tilastokeskus, Työvoimatutkimus.)

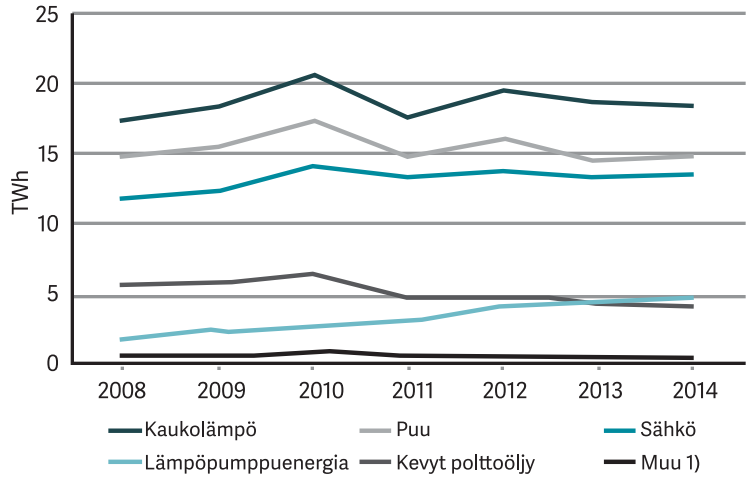
Asunto-osakeyhtiöiden suunnitellut suuret remontit, prosenttia vastanneista. (Mukailtu lähteestä Tilastokeskus, korjausrakentaminen, 11.11.2015)



Viivadiagrammi

Viivadiagrammia käytetään, kun halutaan kuvata ilmiön vaihtelua tai kehityssuuntaa. Tyypillisesti viivadiagrammilla kuvataan tietyn ajan sisällä tapahtuvaa muutosta. Tällöin vaaka-akselina toimii aika. Viivadiagrammissa voi olla useampia viivoja, jos halutaan esimerkiksi havainnollistaa kahden muuttujan eroa.

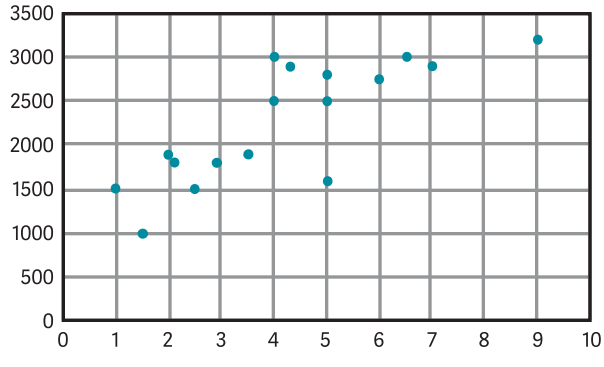
Asuinrakennusten lämmityksen energialähteet 2008–2014. (Mukailtu lähteestä Tilastokeskus, Asumisen energiankulutus, 20.1.2015)



Hajontakuvio

Hajontakuviossa havaintoja kuvataan koordinaatistoon sijoitettuina pisteinä. Sen avulla voidaan saada tietoa muuttujien välisistä keskinäisistä riippuvuuksista.

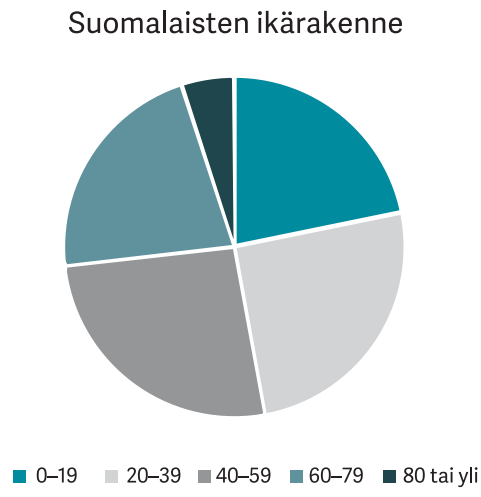
Esimerkki: Erään työntekijäjoukon kuukausipalkan ja työkokemuksen välinen riippuvuus



Ympyrädiagrammi

Ympyrädiagrammia käytetään paljon. Se antaa nopean yleiskuvan jonkin ilmiön jakaantumisesta eri luokkiin. Tarkempi vertailu on kuitenkin hankalaa. Mitä enemmän sektoreita ympyrädiagrammiin muodostuu, sitä vaikeampi sitä on tulkita.

Mukailtu lähteestä
Väestörekisterikeskus
(vuoden 2015 joulukuu)



Tehtäviä

1. Lajittele seuraavat tutkimukset kokonais-, otanta- ja näytteenomaisiksi tutkimuksiksi.

a) Työturvakeskus kerää tiedon kaikista työtapaturmista Suomessa ja tekee niistä tilastoja.

b) Rakennusfirma tutkii asiakastyytyväisyyttä laittamalla palautekyselyn kaikille asiakkailleen.

c) Iltapäivälehti tekee puhelinkyselyn satunnaisesti valitulle 1 000:lle suomalaiselle heidän puoluekannastaan.

d) Paikallislehti kysyy asukkaiden tyytyväisyyttä paikkakunnan palveluihin kymmeneltä ensimmäiseltä vastaantulevalta paikalliselta.

e) Työnantaja tekee työhyvinvointikyselyn kaikille työntekijöilleen.

f) Valtio järjestää presidentinvaalit.

2. Ovatko seuraavat muuttujat määrällisiä vai laadullisia?

a) ikä _____

b) koulutus _____

c) vuosittaiset tulot _____

d) asumismuoto _____

e) tyytyväisyys tuotteeseen _____

f) työkokemuksen määrä vuosina _____

3. Muuta seuraavat kysymykset sellaiseen muotoon, että vastaukseksi saadaan luku.

a) Kuinka usein syöt opiskelijaravintolassa? _____

b) Kuinka paljon harrastat liikuntaa? _____

c) Miten paljon pidät tuotteesta X? _____

4. Työnantaja tekee kaikille työntekijöilleen kyselyn, jonka tarkoituksena on kartoittaa työntekijöiden tyytyväisyyttä työoloihin.

a) Mikä on perusjoukko? _____

b) Mikä on tilastoyksikkö? _____

c) Onko tutkimus kokonais- vai otantatutkimus? _____

d) Mitä muuttujia kysely voisi sisältää? _____

e) Mitä taustamuuttujia kysely voisi sisältää? _____

5. Alla olevat kuvaajat esittävät päivittäin tupakoivien 14–20-vuotiaiden poikien ja tyttöjen osuuksia prosentteina. Vastaa kuvaajien perusteella kysymyksiin.

a) Kuinka monta prosenttia peruskoululaisista pojista tupakoi vuonna 2013? _____

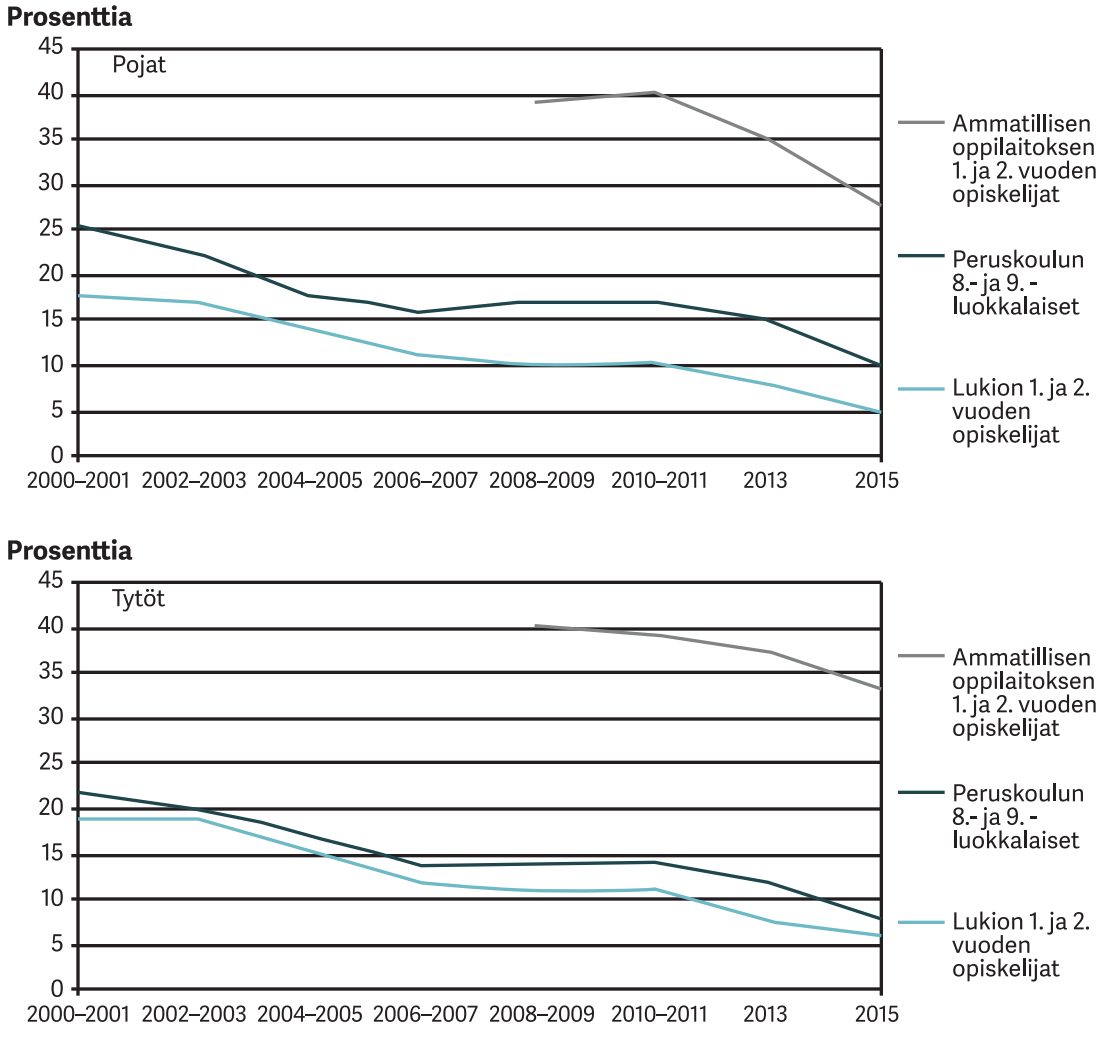
b) Kuinka monta prosenttia peruskoululaisista tytöistä tupakoi vuonna 2013? _____

c) Kuinka monta prosenttia ammatillisessa oppilaitoksessa opiskelevista pojista tupakoi vuonna 2015? _____

d) Kuinka monta prosenttia ammatillisessa oppilaitoksessa opiskelevista tytöistä tupakoi vuonna 2015? _____

e) Mikä on ollut tutkimuksen perusjoukko? _____

f) Mitä muuttujia tutkimus sisältää? _____



Mukailtu lähteestä THL, Tupakkatilasto 2014

6. Markku mittasi vuoden ajan painoaan. Hän mittasi painon aina kuukauden ensimmäisenä päivänä ja tulokset on taulukoitu alla olevaan taulukkoon. Piirrä taulukon pohjalta viivadiagrammi.

Pvm.	1.1.	1.2.	1.3.	1.4.	1.5.	1.6.	1.7.	1.8.	1.9.	1.10.	1.11.	1.12.
kg	98,0	99,0	97,5	96,5	96	97	98,5	99	100	98	97,5	96,5

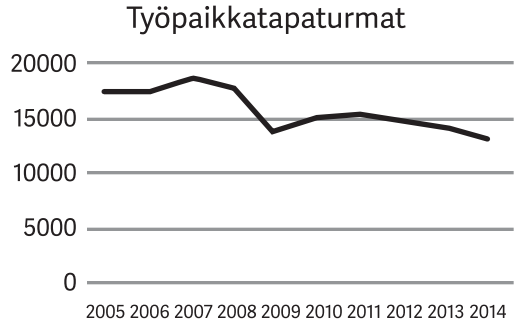
7. Oheisissa kuvaajissa esitetään rakennusalan työpaikkatapaturmien ja työmatkatapaturmien määrä eri vuosina.

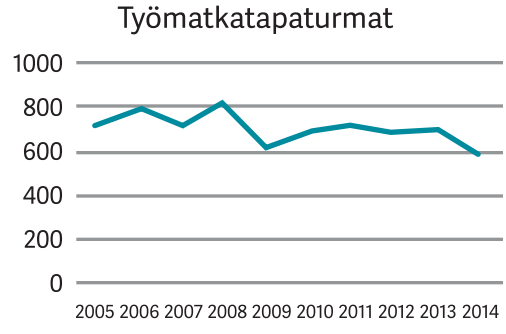
a) Milloin työpaikkatapaturmia on ollut eniten ja milloin vähiten?

b) Kuinka monta työtapaturmaa vähemmän tapahtui vuonna 2009 kuin vuonna 2008?

c) Milloin työmatkatapaturmia on ollut eniten ja milloin vähiten?

d) Arvioi, kuinka monta työpaikka- ja työmatkatapaturmaa tapahtui yhteensä vuonna 2013.





Mukailtu lähteestä Työturvallisuuskeskus

8. Oheinen kuvaaja esittää suomalaisten asumisen kokonaisenergiankulutusta. Vastaa seuraaviin kysymyksiin kuvaajan perusteella.

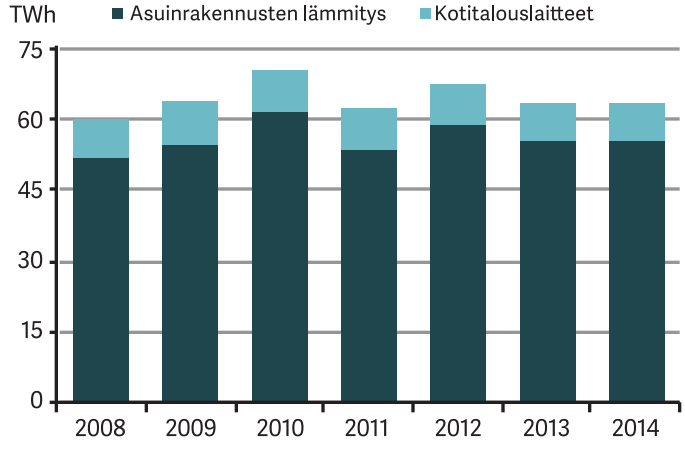
a) Kuinka monta terawattituntia (TWh) energiaa kului asuinrakennusten lämmitykseen vuonna 2008?

b) Kuinka monta terawattituntia energiaa kului kotitalouslaitteiden käyttöön vuonna 2014?

c) Minä vuonna asuinrakennusten lämmitykseen kului eniten energiaa tutkitulla aikavälillä?

d) Kuinka monta prosenttia kokonaisenergiankulutuksesta meni lämmitykseen vuonna 2008?

e) Mikä on ollut tilaston perusjoukko?



Mukailtu lähteestä Tilastokeskus, Asumisen energiankulutus 2014

9. Minna aikoo rakentaa omakotitalon, ja hän sai rakennusfirmalta seuraavan kustannusarvion. Piirrä vihkoosi pylväsdiagrammi taulukon pohjalta.

Osa-alue	Kustannusarvio
Maa-, pohja- ja ulkorakentaminen sekä perustukset	50 000 €
Runkorakenteet ja täydentävät rakenteet	120 000 €
Kalusteet ja varusteet	25 000 €
Konetekniset työt	25 000 €
Henkilöstökustannukset ja rakennuttamisen muut kulut	50 000 €
Yhteensä	270 000 €

10. Erään kunnan neliöhinnat vuosina 2005–2015 on taulukoitu oheiseen taulukkoon (pyöristettynä kymmenen euron tarkkuudella). Piirrä tietojen perusteella vihkoosi viivadiagrammi

Vuosi	Neliöhinta (€)
2005	1 110 €
2006	1 250 €
2007	1 320 €
2008	1 290 €
2009	1 440 €
2010	1 720 €
2011	1 600 €
2012	1 580 €
2013	1 650 €
2014	1 650 €
2015	1 680 €

11. Arvioi omat kuukausittaiset menosi alla olevaan taulukkoon ja piirrä taulukon pohjalta vihkoosi

a) pylväsdiagrammi

b) ympyrädiagrammi. (*Vinkki: Ympyrädiagrammia piirrettäessä kannattaa muuttaa menot prosenteiksi.*)

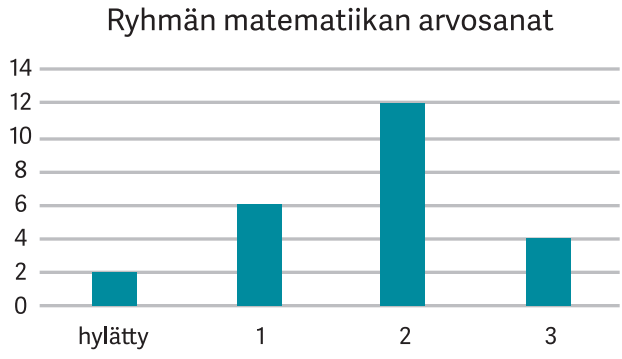
Keksi itse tyhjiin kohtiin itselle sopivia kohteita.

Kohde	Menot kuukaudessa (€)
Asuminen (vuokra, sähköt ja vesi)	
Ruoka	
Puhelin- ja internetlaskut	
Harrastukset	
Yhteensä	

12. Alla on taulukko erään rakennustyöntekijän päivän työtehtävistä. Piirrä taulukon pohjalta vihkoosi ympyrädiagrammi ja pylväsdiagrammi.

Tehtävä	Kulunut aika (min)
Palaverit	90
Työmaalla työskentely	360
Kahvi- ja ruokatauot	60
Siirtymät työmaalta toiselle	90
Yhteensä	600

13. Piirrä seuraava pylväsdiagrammi ympyrädiagrammiksi.



Tilastolliset tunnusluvut

Suomalaisten palkansaajien säännöllisten tulojen keskiarvo vuoden 2014 lopussa oli 3 538 €/kk. Tilastokeskus ilmoitti palkkojen mediaaniksi kuitenkin vain 3 135 €/kk. Miksi palkoista ilmoitettiin kaksi eri keskilukua? Lähde: www.hs.fi/talous/a1440036036090

Jyväskylän ammattikorkeakoulussa vuonna 2015 julkistetun opinnäytetyön eräässä osiossa tutkittiin rappauksen tartuntakykyä betonipintaa vasten. Rapattu pinta kesti pinta-alaa kohden eräässä testissä keskimäärin 0,20 MPa:n suuruisen vedon. Keskihajonta oli 0,02 MPa. Miksi vetolujuudesta ilmoitettiin myös keskihajonta, ja mitä se tarkoittaa? Lähde: www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/88990/Polkki_Harri.pdf?sequence=1

Tilastoitua tietoa voidaan havainnollistaa monella eri tavalla. Tilastoista voidaan tehdä frekvenssitaulukko tai graafinen esitys (diagrammi) tai se voidaan esittää muutamien avainasemassa olevien lukujen avulla. Näistä luvuista tutuin lienee keskiarvo.

Keskiluvut: Moodi, mediaani ja keskiarvo

Keskiluvuilla pyritään kuvaamaan sitä muuttujan arvoa, jonka ympärille tilastoaineisto on jakautunut. Muuttujalla tarkoitetaan tutkittavaa asiaa, esimerkiksi kuukausipalkan suuruutta. Nykyään mediaanit ja keskiarvot määritetään käytännössä aina tilasto-ohjelmien avulla. Ymmärtämisen kannalta on kuitenkin tärkeää tietää, miten nämä tunnusluvut lasketaan.

Moodi (Mo) eli tyyppiarvo on tilastossa yleisimmin esiintyvä arvo. Moodi voidaan määrittää myös sellaisille muuttujille, jotka eivät ole numeroita. Moodeja voi olla useampikin.

Mediaani (Md) on suuruusjärjestykseen järjestetyn aineiston keskimmäinen arvo. Jos tilastoyksiköitä on parillinen määrä, mediaani on kahden keskimmäisen keskiarvo. Mediaani voidaan määrittää, jos aineisto voidaan jakaa suuruusjärjestykseen. Mediaani on erityisen käyttökelpoinen silloin, kun tilastoaineistossa on muutama arvo, joka poikkeaa huomattavasti muista arvoista.

Keskiarvo ($\overline{x}$) lasketaan lisäämällä yhteen muuttujien arvot ja jakamalla summa muuttujien lukumäärällä. Keskiarvo on kaikkein kuvaavin keskiluku silloin, kun tilastoaineisto on jakautunut tasaisesti keskiarvon ympärille.

Esimerkki

Määritä

a) seuraavan luettelon moodi: kissa, kissa, koira, kani, jänis, ihminen
b) seuraavien pituuksien mediaani: 165 cm, 140 cm, 155 cm, 136 cm, 240 cm
c) seuraavien rahamäärien moodi, mediaani ja keskiarvo: 10 €, 5 €, 5 €, 10 €, 4 €, 400 €.

Ratkaisu:
a) Luettelossa yleisin arvo on ”kissa”, joten moodi on kissa.
b) Järjestetään aineisto suuruusjärjestykseen: 136, 140, 155, 165 ja 240. Näistä luvuista keskimmäisin on 155. Mediaani on siis 155 cm.
c) Moodit ovat 5 € ja 10 €, sillä ne olivat yleisimmät rahamäärät.

Mediaania varten järjestetään aineisto suuruusjärjestykseen: 4, 5, 5, 10, 10, 400.

Keskimmäiset luvut ovat 5 ja 10. Näin ollen mediaani on näiden keskiarvo:
Md = (5 + 10) : 2 = 7,5 €.

Keskiarvo saadaan laskulla $\overline{x}$ = (10 + 5 + 5+ 10 + 4 + 400) : 6 = 72,333... €

Vastaus: Mo = 5 € ja 10 €, Md = 7,5 € ja $\overline{x} \approx 72{,}33$ €

Tehtäviä

1. Määritä seuraavien pituuksien moodi, mediaani ja keskiarvo: 175 cm, 180 cm, 160 cm, 175 cm, 190 cm.

2. Suuren rakennusalan yrityksen työntekijöille suunnatussa lehdessä edellisvuoden työtapaturmien johdosta loukkaantuneiden määrät oli ilmoitettu kuukausittain.

tammikuu (2 kpl)	helmikuu (3 kpl)	maaliskuu (0 kpl)	huhtikuu (1 kpl)	toukokuu (22 kpl)	kesäkuu (1 kpl)
heinäkuu (0 kpl)	elokuu (3 kpl)	syyskuu (1 kpl)	lokakuu (0 kpl)	marraskuu (0 kpl)	joulukuu (2 kpl)

a) Edellisvuonna sattui erittäin harvinainen työtapaturma, jossa loukkaantui kerralla 20 ihmistä. Missä kuussa tämä tapahtui?

b) Määritä kuukaudessa loukkaantuneiden henkilöiden määrien moodi. Perustele, miten määritit arvon.

c) Määritä kuukaudessa loukkaantuneiden henkilöiden määrien mediaani. Perustele, miten määritit arvon.

d) Määritä kuukaudessa loukkaantuneiden henkilöiden määrien keskiarvo.

e) Kumpi on parempi luku kuvaamaan kuukaudessa loukkaantuneiden määrää: keskiarvo vai mediaani? Perustele lyhyesti.

3. Eräs remonttifirma teetti asiakkailleen asiakastyytyväisyyskyselyn. Kolmannessa kysymyksessä asiakkaita pyydettiin vastaamaan asteikolla 1–5 siihen, kuinka tyytyväisiä he ovat remonttifirman aikataulujen pitämiseen (1 = erittäin tyytymätön, 5 = erittäin tyytyväinen). Vastauksista koottiin oheinen taulukko:

Kuinka tyytyväinen olet aikataulun pitämiseen? (1 = erittäin tyytymätön, 5 = erittäin tyytyväinen)	
Vastaus	lukumäärä (kuinka moni valitsi tämän vaihtoehdon?)
1	0
2	3
3	5
4	15
5	7

a) Määritä vastauksien moodi.

b) Kuinka monta henkilöä kyselyyn vastasi?

c) Määritä vastauksien mediaani. (*Vihje: Kirjoita auki, mitä kukin vastaaja on vastannut.*)

d) Määritä vastausten keskiarvo.

e) Yksi asiakas ei vastannut kyselyyn. Mitä tapahtuisi moodille, mediaanille ja keskiarvolle, jos puuttuva asiakas vastaisi olleensa erittäin tyytymätön? *(Nousisiko vai laskisiko keskiluku, vai pysyisikö se samana? Perustele lyhyesti!)*

4. Rakennusalan yritys teetti kymmenelle työntekijälleen kyselyn, jossa oli seuraavat kysymykset:

1. Minkälaisia rakennuksia haluaisit yrityksemme pääsääntöisesti rakentavan?	***2. Kuinka tyytyväinen olet viimeisen puolen vuoden aikana tapahtuneeseen johtoportaan toimintaan?***	***3. Jouluna jaamme yhteensä 5 000 euroa työntekijöillemme hyvän tuottavuuden vuoksi. Kuinka paljon tästä pitäisi sinulle jakaa antamasi työpanoksen perusteella?***
vaihtoehdot:	*vaihtoehdot:*	*Vastaus:* _____ €
a) uusia kerrostaloja *b) uusia omakotitaloja* *c) maantiesiltoja* *d) remonttiurakoita* *e) jotain muuta*	*a) en yhtään tyytyväinen* *b) jonkin verran tyytymätön* *c) jonkin verran tyytyväinen* *d) hyvin tyytyväinen* *e) erittäin tyytyväinen*	

Vastauksista koottiin seuraava taulukko

vastaajan numero	***vastaus kysymykseen 1***	***vastaus kysymykseen 2***	***vastaus kysymykseen 3***
1	a) uusia kerrostaloja	e) erittäin tyytyväinen	600 €
2	d) remonttiurakoita	d) hyvin tyytyväinen	500 €
3	a) uusia kerrostaloja	e) erittäin tyytyväinen	700 €
4	e) jotain muuta	e) erittäin tyytyväinen	650 €
5	e) jotain muuta	a) en yhtään tyytyväinen	5 000 €
6	b) uusia omakotitaloja	c) jonkin verran tyytyväinen	100 €
7	c) maantiesiltoja	e) erittäin tyytyväinen	800 €
8	b) uusia omakotitaloja	c) jonkin verran tyytyväinen	500 €
9	a) uusia kerrostaloja	b) jonkin verran tyytymätön	500 €
10	a) uusia kerrostaloja	c) jonkin verran tyytyväinen	700 €

Määritä kaikille kolmelle muuttujalle moodi, mediaani ja keskiarvo, jos se on mahdollista. (*Vihje: Kysymykseen 2 tulee kaksi eri mediaania.*)

Hajontaluvut: vaihteluväli, vaihteluvälin pituus, keskipoikkeama ja keskihajonta

Hajontaluvuilla pyritään kuvaamaan sitä, miten muuttujan arvot vaihtelevat keskiluvun ympärillä. Pieni hajontaluku tarkoittaa sitä, että tilastoaineisto on ”pakkautunut” keskiluvun lähelle, jolloin voidaan ennustaa suhteellisen tarkasti tulevaisuutta vaikkapa keskiarvon avulla. Hajontaluvut lasketaan keskilukujen tapaan yleensä tilasto-ohjelmalla, mutta ymmärtämisen kannalta on kuitenkin tärkeää tietää, miten nämä tunnusluvut määritetään.

Vaihteluväli (W) on se väli, jolla muuttujan arvot vaihtelevat. Vaihteluvälin määrittämiseksi muuttujan arvot on voitava asettaa suuruusjärjestykseen.

Vaihteluvälin pituus (w) lasketaan vähentämällä suurin muuttujan arvo pienimmästä muuttujan arvosta. Vaihteluvälin määrittämiseksi muuttujien arvojen on oltava lukuja.

Keskipoikkeama (d) kertoo, kuinka kaukana yksittäinen havainto on keskimäärin keskiarvosta. Keskipoikkeamaa varten lasketaan ensin keskiarvo. Tämän jälkeen lasketaan jokaisen havainnon etäisyys keskiarvosta. Lopulta näistä etäisyyksistä otetaan keskiarvo. Keskipoikkeama on helposti ymmärrettävissä oleva hajontaluku. Valitettavasti sitä ei kuitenkaan juuri käytetä tilastollisissa analyyseissä.

Keskihajonta (sd) on kaikkein yleisimmin käytössä oleva hajontaa ilmaiseva luku. Sen laskeminen on erittäin työlästä, jos tilastoituja lukuja on paljon. Tässä kirjassa keskihajonnan laskemiseen ei syvennytä, mutta kerrottakoon, että laskutapa pohjautuu keskipoikkeamaan ja että tuloksena on hieman keskipoikkeamaa suurempi luku. Jos havainto poikkeaa yli kahden keskihajonnan verran keskiarvosta, sanotaan, että havainto on merkittävästi poikkeava (harvinainen).

Esimerkki

Määritä mahdollisuuksien mukaan

a) rahamäärien vaihteluväli, vaihteluvälin pituus ja keskipoikkeama, kun rahamäärät olivat 10 €, 5 €, 9 €, 10 €, 4 € ja 40 €

b) aitauksessa olevien eläinten söpöys, kun aitauksessa oli kissa, koira ja hevonen.

Ratkaisu:

a) vaihteluväli:
Pienin rahamäärä oli 4 €, suurin oli 40 €, joten $W = [4\ €, 40\ €]$.

Vaihtoehtoinen merkintätapa olisi ”Rahamäärät vaihtelivat välillä 4 €–40 €”.

Vaihteluvälin pituus

40 € – 4 € = 36 €, joten $w = 36\ €$.

Keskipoikkeama:

Keskiarvo on (10 + 5 + 9 + 10 + 4 + 40) : 6 = 13.
10 €:n poikkeama luvusta 13: 13 – 10 = 3
5 €:n poikkeama luvusta 13: 13 – 5 = 8
9 €:n poikkeama luvusta 13: 13 – 9 = 4
10 €:n poikkeama luvusta 13: 13 – 10 = 3
4 €:n poikkeama luvusta 13: 13 – 4 = 9
40 €:n poikkeama luvusta 13: 40 – 13 = 27
Poikkeamien keskiarvo on (3 + 8 + 4 + 3 + 9 + 27) : 6 = 9
d = 9 €.

b) Eläinten söpöyttä ei voida asettaa objektiiviseen suuruusjärjestykseen. Näin ollen hajontalukuja ei voida määrittää.

Tehtäviä

1. Määritä lukusarjan 1, 4, 5, 7, 1 vaihteluväli, vaihteluvälin pituus ja keskipoikkeama.

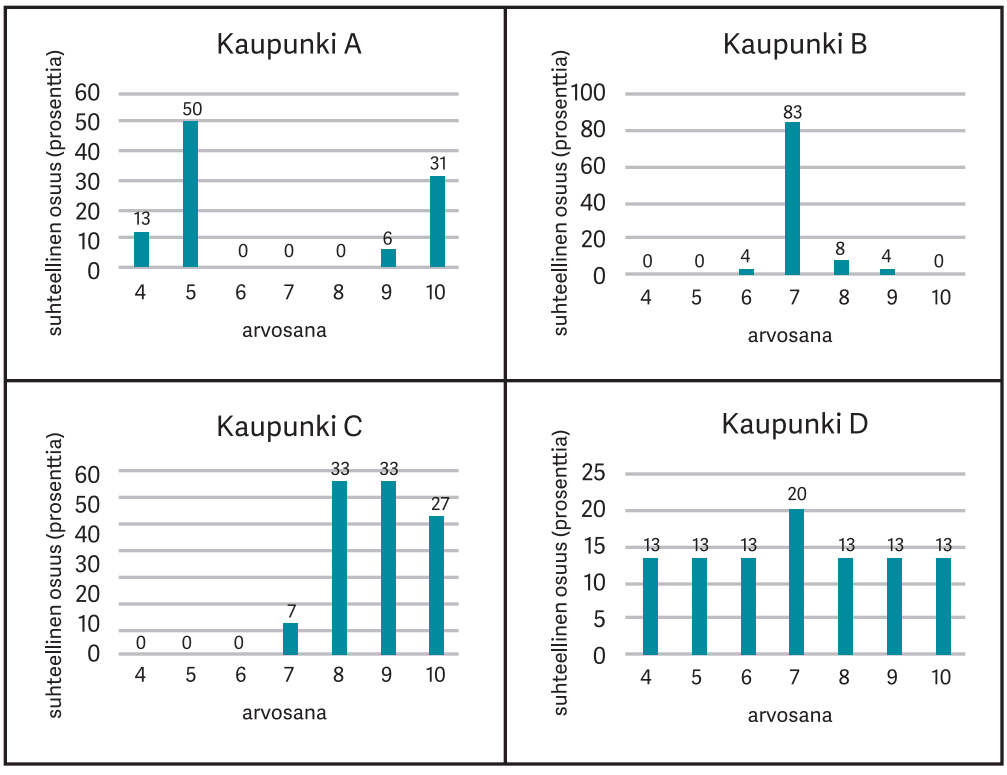
2. Työmaalle ostettiin viisi paketillista halpatuotantomaissa tuotettuja ruuveja. Paketeissa piti etiketin mukaan olla 400 ruuvia, mutta ruuvien määrä saattoi vaihdella ohjeen mukaan paketeittain. Kesätyöntekijä laski ruuvit ja sai tulokseksi seuraavat ruuvimäärät: 370 kpl, 440 kpl, 405 kpl, 380 kpl, 435 kpl. Laske

a) ruuvimäärien keskiarvo ja mediaani

b) ruuvimäärien vaihteluväli, vaihteluvälin pituus ja keskipoikkeama.

c) Maahantuojan internetsivulla ilmoitettiin, että paketissa olevien ruuvimäärien keskiarvo on 400 ja keskihajonta on 29 ruuvia. Poikkesiko yksikään paketti tämän osalta merkittävästi maahantuojan ilmoittamasta keskiarvosta?

3. Suurella rakennusyhtiöllä on neljässä eri kaupungissa toimipiste. Yritys keräsi jokaisesta kaupungista toimipisteen asiakkailta palautteet. Asiakkaita pyydettiin antamaan yleisarvosana työn jäljestä asteikolla 4–10 kaupungissa olevalle toimipisteelle. Tuloksista koottiin alla olevat pylväsdiagrammit.



a) Arvioi ilman laskemista jokaisen kaupungin keskiarvo.

b) Laske tai muulla tavoin perustelemalla määritä jokaisen kaupungin keskiarvo.

c) Missä kaupungissa arvosanojen mediaani oli paras? Perustele.

d) Missä kaupungissa arvosanojen moodi oli paras? Perustele.

e) Missä kaupungissa arvosanojen keskipoikkeama oli suurin? Perustele.

f) Missä kaupungissa työn jälki on ollut tasalaatuisinta? Perustele.

Frekvenssitaulukot

Sana frekvenssi tarkoittaa esiintymiskertojen lukumäärää. Tilastollisissa tutkimuksissa on usein kätevää taulukoida havaintoarvot frekvenssitaulukkoon, josta selviää muuttujan arvojen frekvenssit kertavilkaisulla. Tästä taulukosta on näppärä määrittää moodi ja laskea keskiarvo. Taulukko on tutkimuksen lukijallekin havainnollinen – mittaustulos on selvästi nähtävillä.

Esimerkki 1

Rakennuksella työharjoittelussa ollut opiskelija päätti tutkia timpureille tulevien lehtien määrää. Hän sai tulokseksi seuraavat havaintoarvot:

2 2 0 1 1 1 1 0 2 3 3 2 2 1 1 3 0

a) Tee aineistosta frekvenssitaulukko. Määritä aineistosta moodi, mediaani ja keskiarvo.

b) Määritä suhteellinen frekvenssi.

Ratkaisu

a) Nyt muuttujana on lehtien kappalemäärä. Lasketaan kunkin arvon frekvenssi ja kootaan ne taulukkoon:

Lehtiä	Frekvenssi
0	3
1	6
2	5
3	3

Moodi on siis 1 lehti, koska sen frekvenssi oli havaintoaineistossa suurin.

Mediaani on muuttujan keskimmäinen arvo. Mediaani on tässä tapauksessa 1 lehti, koska järjestettynä aineiston 9. arvo on keskimmäisin koko havaintoarvojen joukosta (17 kpl).

Keskiarvo lasketaan taulukosta siten, että kerrotaan summataan kunkin muuttujan arvon ja frekvenssin tulo ja jaetaan lopuksi havaintoarvojen yhteismäärällä:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3}{17} = 1{,}470\ldots \approx 1{,}5$$

b) Suhteellinen frekvenssi tarkoittaa kunkin luokan frekvenssin prosenttiosuutta kaikkien havaintoarvojen määrästä. Prosenttiosuus lasketaan tietysti jakamalla kunkin luokan frekvenssi havaintoarvojen määrällä:

Lehtiä	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi, *f*-%
0	3	$\frac{3}{17} = 0{,}1764\ldots \approx 18\ \%$
1	6	$\frac{6}{17} = 0{,}3529\ldots \approx 35\ \%$
2	5	$\frac{5}{17} = 0{,}294\ldots \approx 29\ \%$
3	3	$\frac{3}{17} = 0{,}1764\ldots \approx 18\ \%$
Yhteensä	17	100 %

Joskus tutkimusaineisto on mielekkäintä esitellä luokitettuna. Tällöin keskiarvoja laskettaessa täytyy käyttää luokkakeskuksia, jotka saadaan todellisten ala- ja ylärajojen keskiarvona. Nämä rajat määräytyvät usein pyöristyssääntöjen mukaisesti. Ota kuitenkin huomioon, että luokitellun aineiston mukaan laskettu keskiarvo ei ole yhtä tarkka kuin absoluuttinen keskiarvo.

Esimerkki 2

Eräässä pienessä kunnassa asuinalueen talojen asuinpinta-ala määräytyi seuraavasti. Luokkakeskukset on laskettu valmiiksi taulukkoon.

Pinta-ala neliömetreinä	f	Luokkakeskus
21–30	12	$\frac{20{,}5\,\text{m}^2 + 30{,}5\,\text{m}^2}{2} = 25{,}5\,\text{m}^2$
31–40	24	$\frac{30{,}5\,\text{m}^2 + 40{,}5\,\text{m}^2}{2} = 35{,}5\,\text{m}^2$
41–50	22	$\frac{40{,}5\,\text{m}^2 + 50{,}5\,\text{m}^2}{2} = 45{,}5\,\text{m}^2$
51–60	18	$\frac{50{,}5\,\text{m}^2 + 60{,}5\,\text{m}^2}{2} = 55{,}5\,\text{m}^2$
61–70	24	$\frac{60{,}5\,\text{m}^2 + 70{,}5\,\text{m}^2}{2} = 65{,}5\,\text{m}^2$

Määritä aineistoista moodi, mediaani ja keskimääräinen asuinpinta-ala.

Ratkaisu:

Moodiluokkana on pinta-alaltaan 31–40 m^2:n asunto, koska sen frekvenssi on suurin.

Mediaaniluokka on pinta-alaltaan 41–50 m^2:n asunto, koska koko aineiston havaintoarvojen (96 kpl) keskimmäinen arvo osuu tähän luokkaan.

Keskiarvon lasketaan luokkakeskusten avulla seuraavasti:

$$\overline{x} = \frac{12 \cdot 25{,}5\,\text{m}^2 + 24 \cdot 35{,}5\,\text{m}^2 + 22 \cdot 55{,}5\,\text{m}^2 + 18 \cdot 45{,}5\,\text{m}^2 + 24 \cdot 65{,}5\,\text{m}^2}{96} = 46{,}47916\ldots\,\text{m}^2 \approx 46\,\text{m}^2$$

Tehtäviä

1. Oheinen frekvenssitaulukko kuvaa oppilaitoksen opiskelijoiden sisarusten määrää. Määritä aineistosta mediaani, moodi ja keskiarvo.

Sisaruksia	f
0	12
1	9
2	16
3	12
4	6

2. Oheiseen frekvenssitaulukkoon on kerätty tiedot muuttujan k suhteen. Määritä aineistosta mediaani, moodi ja keskiarvo.

Muuttuja k	f
0	1
1	19
2	200
3	1
4	15
5	5

3. Oheiseen frekvenssitaulukkoon on kerätty tiedot koulun vaihto-oppilaiden äidinkielestä. Määritä mahdollisuuksien mukaan aineistosta mediaani, moodi ja keskiarvo.

Kieli	f
Englanti	4
Espanja	1
Ruotsi	2
Saksa	3
Viro	1

4. Pentti tutki työntekijöiden määrää omakotitalotyömailla. Hän kyseli 34 kohteesta. Havaintoarvot olivat seuraavat:

2 1 4 5 2 3 2 5 2 2 3 3 5 3 4 2 3 2 2 3 1 2 1 2 2 2 1 1 1 4 4 3 2 2

a) Järjestä havaintoarvot frekvenssitaulukkoon. Määritä myös suhteellinen frekvenssi.

b) Määritä aineistosta vaihteluväli, mediaani, moodi ja keskiarvo.

Työntekijöiden lukumäärä	*f*	*f*-%

5. Opiskelija selvitti kavereidensa lemmikkieläinten määrät. Tuloksena olivat seuraavat havaintoarvot:

1 0 0 0 2 1 0 0 0 1 1 1 1 2 2 3 0 1 0

a) Järjestä havaintoarvot frekvenssitaulukkoon. Määritä myös suhteellinen frekvenssi.

b) Määritä aineistosta vaihteluväli, mediaani, moodi ja keskiarvo.

Lemmikkieläimiä	*f*	*f*-%

6. Valmistuvien opiskelijoiden arvosanat jakautuivat eräänä keväänä seuraavasti:

Määritä aineistosta mediaani, moodi ja keskiarvo.

Arvosana	*f*-%
1	25,5
2	30
3	44,5

7. Oheiseen taulukkoon on kerätty erään loma-asuntoalueen huoneistokokoja.

a) Laske luokkakeskukset taulukkoon.

Pinta-ala neliömetreinä	*f*	Luokkakeskus
10–29	3	
30–49	8	
50–69	15	
70–89	4	

b) Määritä mediaani, moodi ja keskiarvo.

8. a) Sepe tutki matematiikan opettajan vaatimuksesta luokkatovereidensa kesätyöpalkkoja. Hän oli kasannut tutkimusaineistonsa luokiteltuun frekvenssitaulukkoon:

Määritä tästä aineistosta moodi sekä keski- ja mediaanipalkka.

Palkka euroina	*f*-%
1 000–1 999	25,5
2 000–2 999	30
3 000–3 999	44,5

b) Matematiikan opettaja ei ollut tyytyväinen tuloksen tarkkuuteen vaan vaati nähdä alkuperäisen aineiston. Laske aineistosta tarkka keski- ja mediaanipalkka ja vertaa tulosta a-kohtaan. Voiko tilastoilla valehdella?

Aineisto:

1 100 €	3 100 €	2 100 €	3 000 €	2 300 €	2 400 €
1 200 €	3 250 €	2 050 €	2 100 €	3 400 €	2 500 €

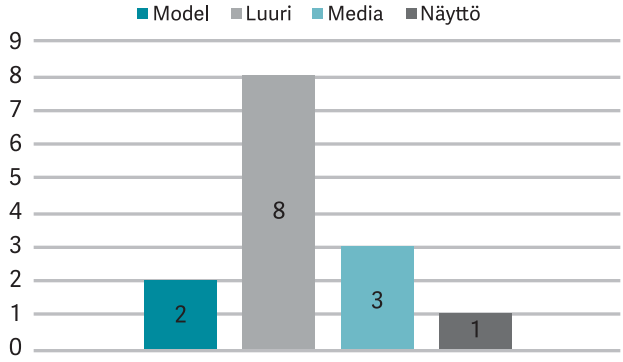
Oman tilastotutkimuksen tekeminen

Voit myös itse tehdä helposti pieniä tilastotutkimuksia.

Esimerkki 1

Otetaan tilastomuuttujaksi ryhmäsi opiskelijoiden matkapuhelimen merkki. Tehdään taulukko ja muodostetaan taulukkolaskentaohjelmalla graafinen esitys. Määritetään aineiston moodi.

Tulos voisi olla vaikka seuraavan kaltainen:



Puhelinmerkkien esiintyvyys ryhmässä X	
Puhelinmerkki	Frekvenssi
Model	2
Luuri	8
Media	3
Näyttö	1

Moodi on puhelinmerkki Luuri, koska sen frekvenssi on suurin. Tulos osoittaa varsin selvästi suosituimman merkin, mutta näin pienellä otoksella on kuitenkin oltava varovainen johtopäätöksiä tehtäessä. Tämän tutkimuksen perusteella on mahdotonta ennustaa koko koulun suosituinta puhelinmerkkiä.

Esimerkki 2

Tilastotutkimuksiin halutaan usein muuttuja, joka saa arvokseen numeerisia arvoja. Tällöin siitä voidaan määrittää myös erilaisia tunnuslukuja, kuten keskiarvo ja keskihajonta. Matkapuhelintutkimuksessa opiskelijoilta kysytään, kuinka monta matkapuhelinta heillä on ollut. Tulokseksi saadaan seuraava taulukko:

Matkapuhelinten lukumäärä	Frekvenssi
1	2
2	3
3	5
4	3
5	1

Tuloksista voidaan nyt laskea esimerkiksi Excelillä keskiarvo, moodi, mediaani ja keskihajonta. Tulokseksi saadaan

keskiarvo = 2,86 moodi = 3
mediaani = 3 keskihajonta = 1,12

Tulokset kertovat, että opiskelijoilla on ollut keskimäärin 3 puhelinta, ja keskihajonta kertoo, että tulosten hajonta on pientä.

Tehtäviä

1. Mikä on suosituin puhelimen väri ryhmässäsi? Tee vihkoosi frekvenssitaulukko ja graafinen esitys tuloksesta.

2. Miten ryhmäläisesi kulkevat jokapäiväiset koulumatkat (esim. mopo, polkupyörä, linja-auto jne.)? Tee vihkoosi frekvenssitaulukko ja graafinen esitys tuloksesta.

3. Kuinka usein oppilaitoksessasi tarjotaan kala-, liha- tai kasvisruokaa kahden viikon aikana? Tee vihkoosi taulukko ja graafinen esitys tuloksesta. Määritä moodi.

4. Ota selvää, kuinka monta sisarusta ryhmäläisilläsi on. Laadi vihkoosi vastauksista frekvenssitaulukko ja määritä moodi, mediaani ja keskiarvo.

5. Seuraa säätä kahden viikon ajan. Kuinka monena päivänä sataa? Tee vihkoosi taulukko ja graafinen esitys tuloksesta. Voiko tuloksista tehdä johtopäätöksiä meneillään olevan vuodenajan sadepäivien määrästä?

---

6. Seuraa rahankäyttöäsi kahden viikon ajan. Minä viikonpäivinä käytät eniten rahaa? Tee vihkoosi taulukko ja graafinen esitys tuloksesta.

7. Ota selvää, kuinka monta kertaa viikossa ryhmäläisesi harrastavat liikuntaa. Laadi vastauksista vihkoosi frekvenssitaulukko ja määritä moodi, mediaani ja keskiarvo.

8. Määritä edellisen tehtävän keskihajonta. Voit käyttää apunasi Excel-taulukko-ohjelmaa.

9. 👣👣 Vertaile eri asumismuotojen yleisyyttä. Kuinka paljon se poikkeaa siitä, miten ihmiset haluaisivat asua. Tee kysely mahdollisimman laajalla otannalla. Mitä johtopäätöksiä tuloksista voisi tehdä?

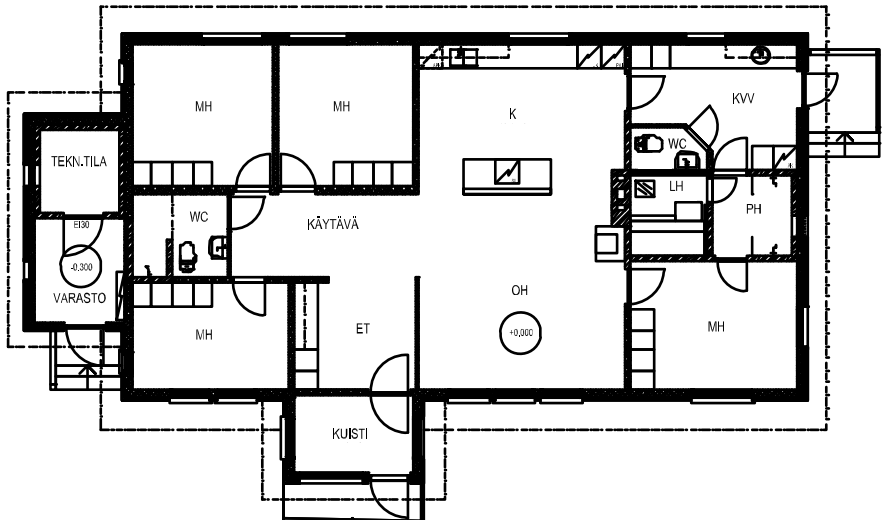
10. 👣👣👣 Tee asiakastöiden tilaajille palautelomake, jossa he voivat kertoa mielipiteensä tuotteesta ja palvelun laadusta. Kun palautteita on tullut tarpeeksi, tee kooste, josta käy ilmi, miten ryhmäsi oli onnistunut tuotteiden tekemisessä ja asiakaspalvelussa. Mikä onnistui hyvin? Entä missä olisi parannettavaa?

s. 113

1. Arvioi, missä mittakaavassa yleensä piirretään

a) talon piirustukset	1 : 100
b) pihan piirustukset	1 : 1 000
c) kaupungin piirustukset	esim. 1 : 20 000
d) Maailman kartta	esim. 1 : 50 000 000
e) Suomen kartta	esim. 1 : 1 500 000

2. Kuvan mittakaava on 1 : 100. Kuinka leveä talo on todellisuudessa? Ilmoita vastauksesi metreinä.



noin 14 m

3. Mitkä ovat tehtävän 2 kuvan varaston todelliset mitat, kun kuvan pohjapiirustuksen mittakaava on 1:100?

noin 1,5 x 1,8 metriä

4. Mitkä ovat huoneen mitat piirustuksessa, kun mittakaava on 1 : 200 ja todellisuudessa huoneen mitat ovat 5 m x 6 m?

500 cm : 200 = 2,5 cm

600 cm : 200 = 3 cm

Vastaus: 2,5 cm x 3 cm

5. Mikä on mittakaava, kun huoneen leveys piirustuksessa on 2,5 cm ja todellisuudessa se on 375 cm?

375 cm : 2,5 cm = 150

Vastaus: Mittakaava on 1 : 150

6. Kartalla kahden pisteen etäisyys on 8 cm. Mikä se on todellisuudessa, kun kartan mittakaava on 1 : 20 000?

8 cm · 20 000 = 160 000 cm = 1 600 m

Vastaus: 1 600 m eli 1,6 km

7 Piirrä vihkoosi luokkahuoneesi mittakaavassa 1 : 200.

Ei mallivastausta

s. 116

1. Laske seuraavien alueiden pinta-alat:

a) neliö, jonka sivu n pituus on 1,3 m

1,3 m · 1,3 m = 1,69 m^2

b) suorakulmio, jonka toinen sivu on pituudeltaan 1,3 m ja toinen 2,5 m.

1,3 m · 2,5 m = 3,25 m^2

2. Huoneen seinien pituudet mitattiin ja tulokseksi saatiin 4 m, 4 m, 5 m ja 5 m. Mikä on lattian pinta-ala, kun huone on muodoltaan suorakulmio?

Lattian pinta-ala saadaan lasketuksi kertomalla kahden erimittaisen seinän pituudet keskenään: A = 4 m · 5 m = 20 m^2

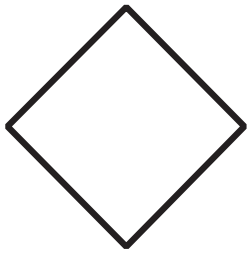
3. Talon ulkoseinän pituus on 10 m ja korkeus 3 m. Mikä on seinän pinta-ala?

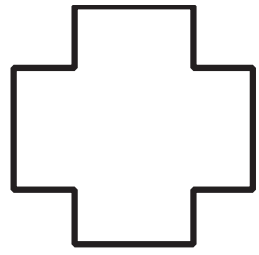
Seinän pinta-ala saadaan kertomalla seinän pituus sen korkeudella:
A = 10 m · 3 m = 30 m^2

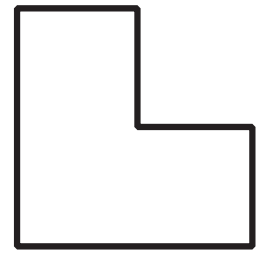
4. Aittarakennus on neliön muotoinen. Sisäpuolelta mitattuna kaikkien seinien pituudet ovat 3 m. Mikä on aitan pinta-ala?

Aitan lattian pinta-ala saadaan kertomalla kahden seinän pituudet keskenään:
A = 3 m · 3 m = 9 m^2

5. Mittaa ja laske seuraavien kuvioiden pinta-alat ja piirit:







Ei mallivastausta

s. 217

1. Lajittele seuraavat tutkimukset kokonais-, otanta- ja näytteenomaisiksi tutkimuksiksi.

a) Työturvakeskus kerää tiedon kaikista työtapaturmista Suomessa ja tekee niistä tilastoja.

b) Rakennusfirma tutkii asiakastyytyväisyyttä laittamalla palautekyselyn kaikille asiakkailleen.

c) Iltapäivälehti tekee puhelinkyselyn satunnaisesti valitulle 1 000:lle suomalaiselle heidän puoluekannastaan.

d) Paikallislehti kysyy asukkaiden tyytyväisyyttä paikkakunnan palveluihin kymmeneltä ensimmäiseltä vastaantulevalta paikalliselta.

e) Työnantaja tekee työhyvinvointikyselyn kaikille työntekijöilleen.

f) Valtio järjestää presidentinvaalit.

Kokonaistutkimuksia: a, b, e, f

Otantatutkimuksia: c

Näytteenomaisia tutkimuksia: d

2. Ovatko seuraavat muuttujat määrällisiä vai laadullisia?

a) ikä	määrällinen
b) koulutus	laadullinen
c) vuosittaiset tulot	määrällinen
d) asumismuoto	laadullinen
e) tyytyväisyys tuotteeseen	laadullinen
f) työkokemuksen määrä vuosina.	määrällinen

3. Muuta seuraavat kysymykset sellaiseen muotoon, että vastaukseksi saadaan luku.

a) Kuinka usein syöt opiskelijaravintolassa?

Kuinka monta kertaa viikossa syöt opiskelijaravintolassa?

b) Kuinka paljon harrastat liikuntaa?

Kuinka monta tuntia harrastat viikossa liikuntaa?

c) Miten paljon pidät tuotteesta X?

Asteikolla 1–5 kuinka paljon pidät tuotteesta X?

4. Työnantaja tekee kaikille työntekijöilleen kyselyn, jonka tarkoituksena on kartoittaa työntekijöiden tyytyväisyyttä työoloihin.

a) Mikä on perusjoukko?

työntekijät

b) Mikä on tilastoyksikkö?

työntekijä

c) Onko tutkimus kokonais- vai otantatutkimus?

kokonaistutkimus

d) Mitä muuttujia kysely voisi sisältää?

esimerkiksi tyytyväisyys palkkaan, esimieheen, työvälineisiin ja työilmapiiriin

e) Mitä taustamuuttujia kysely voisi sisältää?

asema, palkka, ikä, työsuhteen tyyppi

5. Alla olevat kuvaajat esittävät päivittäin tupakoivien 14–20-vuotiaiden poikien ja tyttöjen osuuksia prosentteina. Vastaa kuvaajien perusteella kysymyksiin.

a) Kuinka monta prosenttia peruskoululaisista pojista tupakoi vuonna 2013?

15 %

b) Kuinka monta prosenttia peruskoululaisista tytöistä tupakoi vuonna 2013?

noin 12 %

c) Kuinka monta prosenttia ammatillisessa oppilaitoksessa opiskelevista pojista tupakoi vuonna 2015?

noin 28 %

d) Kuinka monta prosenttia ammatillisessa oppilaitoksessa opiskelevista tytöistä tupakoi vuonna 2015?

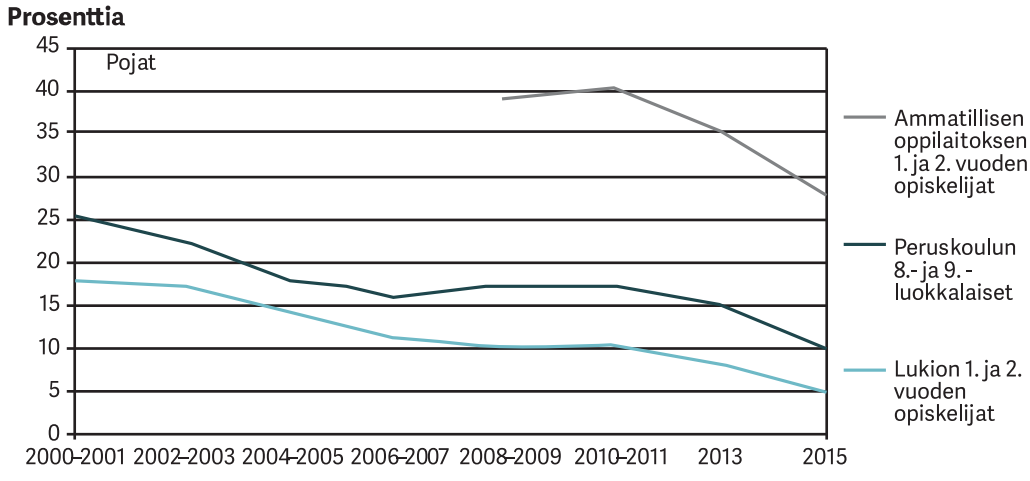
noin 33 %

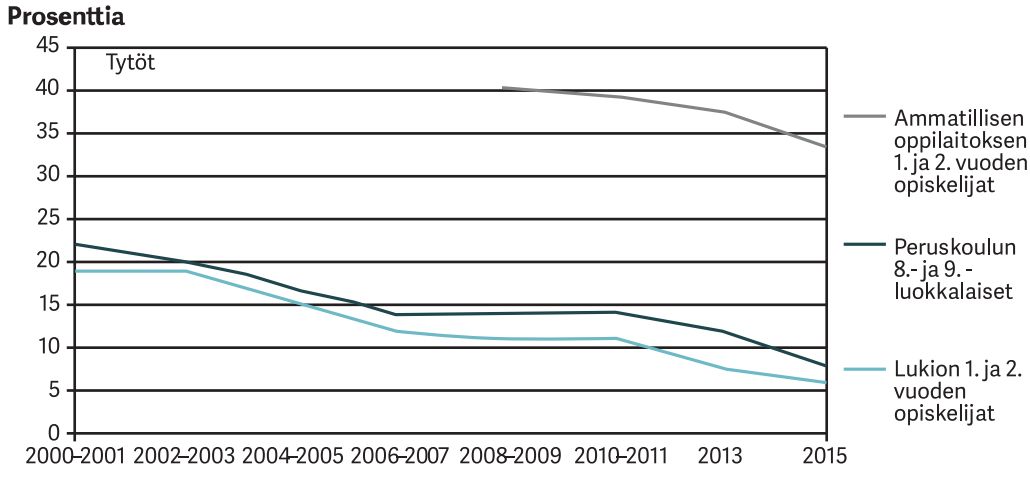
e) Mikä on ollut tutkimuksen perusjoukko?

14–20-vuotiaat oppilaat/opiskelijat

f) Mitä muuttujia tutkimus sisältää?

sukupuoli, opiskelupaikka, tupakointi

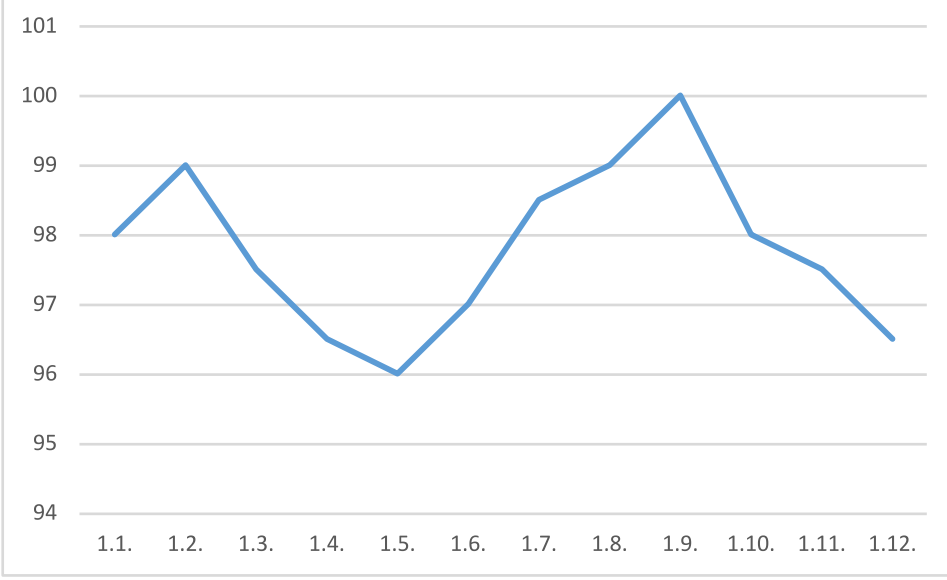




Mukailtu lähteestä THL, Tupakkatilasto 2014

6. Markku mittasi vuoden ajan painoaan. Hän mittasi painon aina kuukauden ensimmäisenä päivänä, ja tulokset on taulukoitu alla olevaan taulukkoon. Piirrä taulukon pohjalta viivadiagrammi.

Pvm.	1.1.	1.2.	1.3.	1.4.	1.5.	1.6.	1.7.	1.8.	1.9.	1.10.	1.11.	1.12.
kg	98,0	99,0	97,5	96,5	96	97	98,5	99	100	98	97,5	96,5



7. Oheisissa kuvaajissa esitetään rakennusalan työpaikkatapaturmien ja työmatkatapaturmien määrä eri vuosina.

a) Milloin työpaikkatapaturmia on ollut eniten ja milloin vähiten?

eniten vuonna 2007 ja vähiten vuonna 2009

b) Kuinka monta työtapaturmaa vähemmän tapahtui vuonna 2009 kuin vuonna 2008?

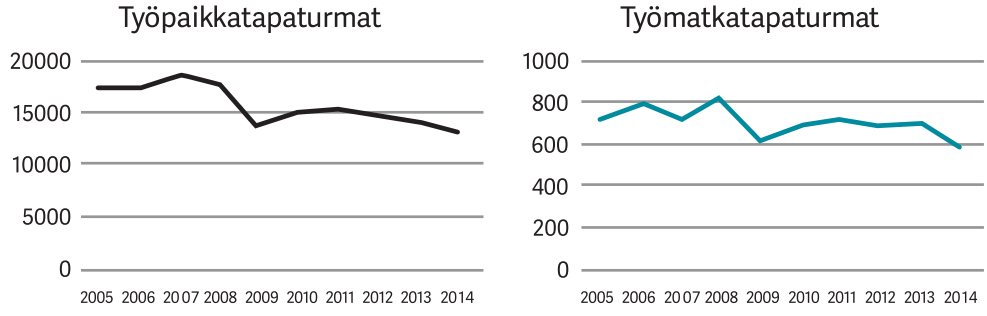
noin 4 000

c) Milloin työmatkatapaturmia on ollut eniten ja milloin vähiten?

eniten vuonna 2008 ja vähiten vuonna 2009

d) Arvioi, kuinka monta työpaikka- ja työmatkatapaturmaa tapahtui yhteensä vuonna 2013?

14 000 + 700 = 14 700



Mukailtu lähteestä Työturvallisuus-keskus

8. Oheinen kuvaaja esittää suomalaisten asumisen kokonaisenergiankulutusta. Vastaa seuraaviin kysymyksiin kuvaajan perusteella.

a) Kuinka monta terawattituntia (TWh) energiaa kului asuinrakennusten lämmitykseen vuonna 2008?

noin 52–53 TWh

b) Kuinka monta terawattituntia energiaa kului kotitalouslaitteiden käyttöön vuonna 2014?

noin 10 TWh

c) Minä vuonna asuinrakennusten lämmitykseen kului eniten energiaa tutkitulla aikavälillä?

vuonna 2010

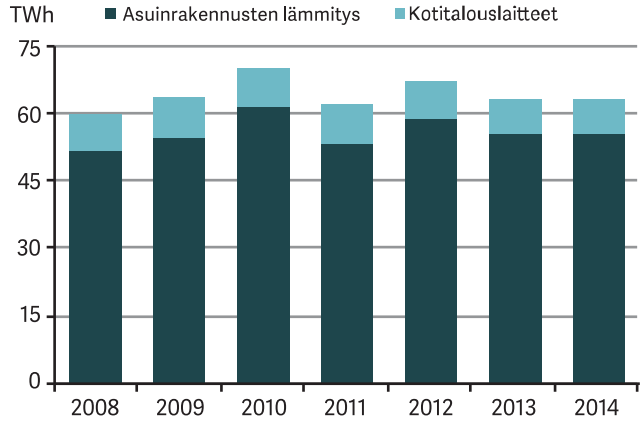
d) Kuinka monta prosenttia kokonaisenergiankulutuksesta meni lämmitykseen vuonna 2008?

Kokonaisenergian kulutus oli noin 60 TWh, ja lämmityksen osuus siitä oli noin 52 TWh.

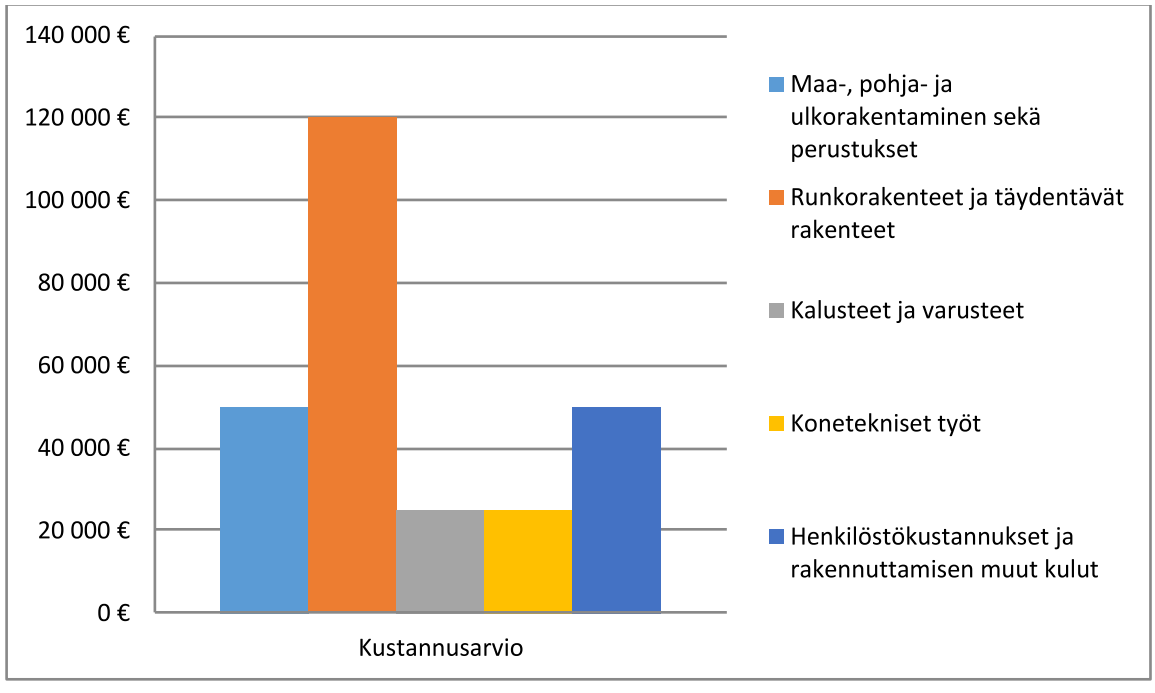
(52 TWh : 60 TWh) · 100 ≈ 87 %

e) Mikä on ollut tilaston perusjoukko?

suomalaiset asuinrakennukset



Mukailtu lähteestä Tilastokeskus, Asumisen energiankulutus 2014

9. Minna aikoo rakentaa omakotitalon ja hän sai rakennusfirmalta seuraavan kustannusarvion. Piirrä pylväsdiagrammi taulukon pohjalta.

Osa-alue	Kustannusarvio
Maa-, pohja- ja ulkorakentaminen sekä perustukset	50 000 €
Runkorakenteet ja täydentävät rakenteet	120 000 €
Kalusteet ja varusteet	25 000 €
Konetekniset työt	25 000 €
Henkilöstökustannukset ja rakennuttamisen muut kulut	50 000 €
Yhteensä	270 000 €